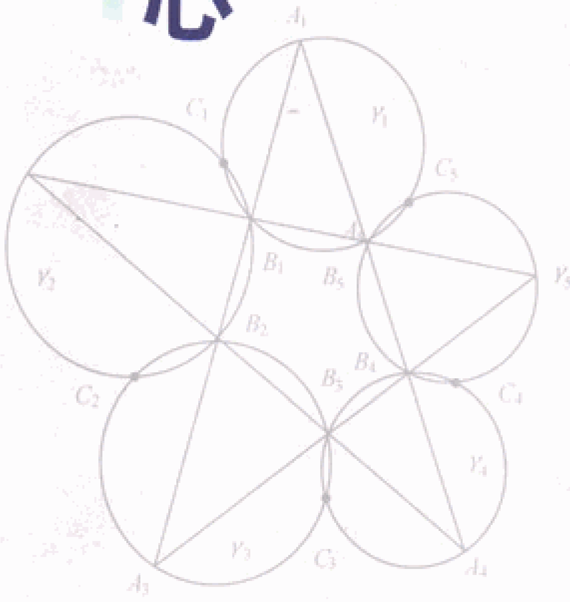
三角形的五心

SANJIAOXINGDEWUXIN

贺功保　叶美雄　编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SANJIAOXING DE WUXIN

三角形的五心

贺功保　叶美雄　编著

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

全书共分6章，包括三角形五心的概念和性质，三角形五心的坐标表示、向量形式及应用，三角形五心间的距离，圆内接四边形中三角形的五心性质及应用，三角形五心性质的综合应用等内容，每章节后配有习题，书后附有习题参考答案。本书适合于初、高中学生，初、高中数学竞赛选手及教练员使用，也可作为高等师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业开设的"竞赛数学"课座教材及国家级、省级骨干教师培训班参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

三角形的五心/贺功保，叶美雄编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-5603-2899-7

Ⅰ.三… Ⅱ.①贺…②叶… Ⅲ.三角形-研究 Ⅳ.0123.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第044584号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 李广鑫
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 总印张 15.5 总字数 277千字
版 次 2009年4月第1版 2009年4月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2899-7
印 数 1~3 000册
定 价 28.00元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

序

三角形的五心，是三角形的五个特殊点。三角形的三条中线交于一点，该点称为三角形的重心；三角形的三条高交于一点，该点称为三角形的垂心；三角形的三条内角平分线交于一点，该点称为三角形的内心；三角形各边上的垂直平分线交于一点，该点称为三角形的外心，等等。这些点对三角形而言，都有若干重要的性质。例如，内心就是三角形内切圆的圆心，外心就是三角形的外接圆的圆心。1803年，有一个叫克鲁格(Kluegel)的数学家，把上面提到的4个点称之为三角形的"奇特点"。自18世纪至20世纪，许多奇特点、奇特线、奇特圆相继发现，诸如"费马点"、"陪位重心"、"葛尔刚点"、"纳格尔点"、"勃罗卡点"、"等角共轭点"、"欧拉线"、"西姆松线"、"九点圆"、"斯牌克圆"、"泰勒圆"等数不胜数。以至于1914年数学家伯肯(G. Berken)和迈耶(W. Fr. Meyer)在他们撰写的一篇介绍部分奇特点、奇特曲线、奇特圆的文章中，给出了"对于三角形的奇特点和奇特线的研究，构成了三角形几何"的三角形几何的定义。从这可以看出：三角形几何正好就是我们今日所说"平面几何"，平面几何也就是昔日的三角形几何，它所研究的不只是三角形，也包括多边形。因为用联结顶点的直线，便可把多边形割成若干个三角形来研究。

随着时代的变迁，三角形几何走过了它的一段兴盛与衰落时期。1995年《美国数学月刊》刊出了《三角形几何学的兴起，衰落和可能的东山再起：微型历史》一文，全面阐述了"一个被历史的尘埃和灰烬所掩埋的科目能够东山再起吗?"这一饶有意趣的议题，并给出了正面的回答。1998年，中国科学技术大学的常庚哲教授也在《中学数学教学》(1998年第5期)撰写了《"三角形几何"的兴衰和可能的东山再起》的文章，预测三角形几何研究的热潮又会东山再起。他说：一个被历史尘封的学科能东山再起吗？这只有在它前进的过程中伴随着极大的革新才有可能。如今，三角形几何的焦点已经在改变，这种改变是由计算机的产生和发展而引起的。很早以前，人们就清醒地看到：在视觉的、数值的、代数和逻辑符号三个方向上，计算机都提供了数学实验的可能性，提供了进行"机械的"和"自动的"证明的可能性，以及发现新的定理的可能性。机器证明数学定理，应该首先选择简单的定理下手。因此，三角形几何构成了首选的对象。这样，三角形几何又变成了用计算机证明和发现定理的策略的实验基地。

时至今日，国内各类杂志上讨论平面几何问题的文章也如雨后春笋，特别是各类杂志的问题征解栏目中的三角形几何问题也占了较重的分量。国内出版界出版的平面几何书籍也渐渐多了起来。例如笔者就分别在科学出版社出版了《几何课程研究》，在高等教育出版社出版了《中学几何研究》等高校教材，在湖南师大出版社出版了《奥林匹克数学中的几何问题》，在华东师大出版社出版了《三角形——从全等到相似》，《四边形——从分解到组合》，并且这两本书也同时由台湾九章出版社出版。特别是哈尔滨工业大学出版社出版了数十种平面几何书籍，形成了强大的平面几何经典著作系列阵容，呈现出我国出版界的一道亮丽的风景线。

《三角形的五心》这本书，就是这亮丽的风景中的一个景点，这是一位中学数学教师经过多年的研究而汇聚起来的成果。书中介绍了他如何从基本的、平凡的知识学起，如何从三角形的五心的有关性质去探索有关几何问题的妙解，使我们在阅读时，会有似曾相识的感触，甚至可以问自己，我学到这些知识时会发现这种妙解吗？面对一个又一个思路别致，风格迥异的求解思路，我们能否考虑：还能找出一种新的思路吗？几何学的奥妙，研究的课题是无穷无尽的，善读者，乐思者必有所发现，而本书正好为我们提供了乐思善读的丰富经验和模仿练习的众多良机。

三角形的五心，这不多的基本知识，运用起来变化却很多。用得好，可帮你解决不少问题。学习平面几何，就是这么个过程，由多而少，由少而多，开始学新东西，眼花缭乱，觉得内容很多，学多了，想透了，你会发现，基本的东西，关键

的东西并不多，抓住五心，就都串连起来了。牢固的基础知识，熟悉的图形基本性质，是我们能够翱翔在平面几何空间的首要条件，希望读者们拿起笔和纸，亲自研究一下五心有趣的性质和运用的想法，因为这些想法将促使我们进一步去寻根究底。学习平面几何与锻炼身体一样，绝不是旁观者的活动。数学史中许多最重要的进展往往是由敏锐的几何洞察力的飞跃所致。面对三角形几何这笔丰厚的遗产，我们应牢记数学家H·G·费儒说过的话："谁看不起欧氏几何，谁就好比是从国外回来看不起自己的家乡。"最后借用叶中豪先生的一句话作为结束语吧！

"愿几何世界中的瑶草琼花迎风绽放，来点缀美丽芬芳的数学百花园。"

沈文选

2009年3月18日于长沙

目 录

第 1 章　三角形五心的概念和性质 ………………………… (1)

第 1 节　三角形外心的概念和性质 ……………………… (1)
第 2 节　三角形垂心的概念和性质 ……………………… (12)
第 3 节　三角形重心的概念和性质 ……………………… (36)
第 4 节　三角形内心的概念和性质 ……………………… (48)
第 5 节　三角形旁心的概念和性质 ……………………… (79)
第 6 节　众心关联和众心共圆 ………………………… (91)

第 2 章　三角形五心的坐标表示、向量形式及应用 …… (109)

第 1 节　三角形五心的坐标表示及应用 ………………… (109)
第 2 节　三角形五心的向量形式及应用 ………………… (118)

第 3 章　三角形五心间的距离 ………………………… (145)

第 4 章　圆内接四边形中三角形的五心性质及应用 … (159)

第 5 章　三角形五心性质的综合应用 …………………… (180)

第 6 章　平面几何中的几个重要定理 …………………… (212)

参考答案 …………………………………………………… (220)

参考文献 …………………………………………………… (235)

第1章 三角形五心的概念和性质

三角形的五心，即外心、内心、重心、垂心、旁心，是"两考"(即中考与高考)和"两赛"(即初中数学竞赛与高中数学竞赛)中，经常出现的热点内容，也是初高中数学竞赛大纲中特别加强的内容.与三角形五心有关的几何问题涉及知识广，难度大，技巧性强，方法灵活，是学生较难掌握的内容之一，因此，我们有必要对三角形五心的知识和解题技巧作一专门的研究和介绍.下面首先介绍三角形五心的概念和性质.

第1节 三角形外心的概念和性质

我们知道，经过线段中点且和这条线段垂直的直线，叫做这条线段的中垂线(或者称为垂直平分线).例如，图1.1中，直线 MN 就是线段 BC 的中垂线；或者说，它是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中垂线(即直线 MN 经过 BC 的中点 P，而且垂直 BC).

我们还知道，线段的中垂线上任何一点和这条线段的两个端点距离相等.如图1.2中，O 是线段 BC 的中垂线 L_1 上的点，则 $OB = OC$.由此可见，只要作出 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中垂线 L_1 和边 CA 的中垂线 L_2，那么，L_1 和 L_2 相交的交点 O 就是和 A, B, C 距离相等的点，即有 $OA = OB = OC$.

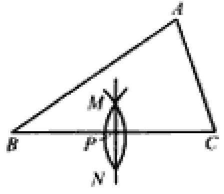


图1.1

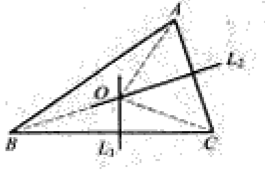


图1.2

容易想到，如果再作出边 AB 的中垂线 L_3，那么，L_1 和 L_3 的交点也是和 A，B，C 距离相等的点，同理 L_2 和 L_3 的交点也应该是和 A, B, C 距离相等的点，这样，我们要问：这两个交点是否就是 L_1 和 L_2 的交点 O 呢？也就是说，这三条直

线 L_1, L_2, L_3 是否相交于一点呢？

我们来作三角形的中垂线：

先作锐角三角形三边的中垂线，如图 1.3 所示，可以看到，所作的这三条中垂线相交于一点 O；

再来作钝角三角形三边的中垂线，如图 1.4 所示，所作出的这三条中垂线相交于一点 O；

最后，来作直角三角形的中垂线，如图 1.5 所示，所作出的这三条中垂线也相交于一点 O.

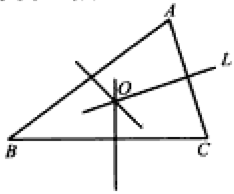


图 1.3

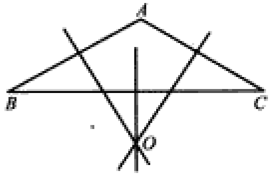


图 1.4

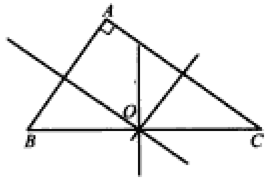


图 1.5

通过实际作图，综合以上三种情形，得到如下结论：

任何三角形的三边的中垂线，都相交于一点，这个点和三角形的三个顶点距离相等. 通常称为三角形的“外心”，用大写字母“O”来表示，由上面的图 1.3，1.4，1.5 可以看出：

(1) 锐角三角形的外心在三角形内；

(2) 钝角三角形的外心在三角形外；

(3) 直角三角形的外心就是斜边的中点.

根据以上事实，我们得到：

三角形外心定理　三角形三边的中垂线相交于一点，这个点到三角形三个顶点的距离相等.

如图 1.6，PD, QE, SF 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的中垂线. 求证：PD, QE, SF 相交于一点 O，且 $OA = OB = OC$.

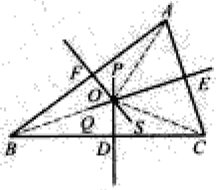


图 1.6

证明　因为 BC 和 CA 相交于点 C，所以它们的中垂线 PD 与 QE 必相交于一点 O，联结 OA, OB, OC.

因为点 O 在 BC 的中垂线 PD 上，所以 $OB = OC$.

又点 O 在 CA 的中垂线 QE 上，所以 $OC = OA$，于是，

有 $OA = OB = OC$.

由 $OA = OB$ 可知,点 O 必在 AB 的中垂线 SF 上,即 SF 经过 PD,QE 的交点 O,这就证明了 $\triangle ABC$ 的三边的中垂线 PD,QE,SF 相交于一点 O,且 $OA = OB = OC$.

我们把这个点 O 叫做 $\triangle ABC$ 的外心,这个定理叫做三角形的外心定理.

在上面的证明过程中,我们的证明思路是:先推断其中的两条直线 PD,QE 相交于点 O,再利用交点 O 的特性 $OA = OB = OC$ 来进一步判断第三条直线 SF 也经过这个交点 O,这是证明三线共点的一种常用方法.

由以上定理易知:$\triangle ABC$ 的外心 O 是和三个顶点 A,B,C 距离相等的点,因此,以 O 为圆心,OA 为半径作圆,必定经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点,如图 1.7 所示.

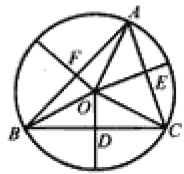


图 1.7

三个顶点都在同一个圆周上的三角形,叫做圆的内接三角形,这个圆就叫做三角形的外接圆,如图 1.7 中,$\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 都在圆 O 上,因此,这个 $\triangle ABC$ 就叫做圆 O 的内接三角形,这个圆 O 就叫做 $\triangle ABC$ 的外接圆.

由此可见,三角形的外心就是三角形的外接圆的圆心,根据以上知识,不难推得如下一些基本性质:

(1) 确定一个三角形的外心没有必要把三边的中垂线都作出来,只要作出三角形的任何两边的中垂线,则它们的交点就是所要确定的三角形的外心.

(2) 三角形的两边的中垂线的交点是唯一的,因此,每个三角形有且只有一个外心,同时,每个三角形有且只有一个外接圆,并且进一步可知:经过不在同一直线上的三点,可以作一个而且只可以作一个圆.

(3) 三角形的外心在任意一边的中垂线上,也就是三角形的任意一边的中垂线必定经过外接圆的圆心.换言之,弦的垂直平分线必定经过圆心.

(4) 直角三角形的外心是斜边的中点,由此可见:以直角三角形的斜边为直径的圆,必定经过直角顶点,也就是说,这个圆是直角三角形的外接圆.由此还可以得到:直角三角形中,斜边上的中线长等于斜边长的一半;直径所对的圆周角必是直角.再结合锐角三角形与钝角三角形外心的作图方法(图1.3,1.4),还可以进一步得到:圆外的点与直径的两个端点连线所成的较小的角一定是锐角,圆内的点与直径的两个端点连线所成的较小的角一定是钝角,反过来,这个结论也成立.

对于三角形的外心除了具备以上基本性质外,经过研究,我们发现三角形的外心还具备如下性质:

定理 1　三角形的外心是三角形三边中垂线的交点；三角形的外心到三角形三顶点的距离相等，反之亦成立.

定理 2　若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，当 $\angle A$ 为锐角时，则如图 1.8 所示，有 $\angle BOC = 2\angle A$；当 $\angle A$ 为钝角时，则如图1.9所示，有 $\angle BOC = 360° - 2\angle A$（想一想，为什么?）

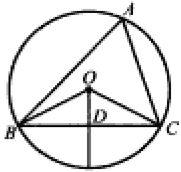


图 1.8

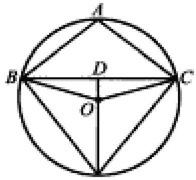


图 1.9

反过来，我们有若点 O 和 C 在直线 AB 同侧，$OA = OB$ 且 $\angle AOB = 2\angle ACB$，则点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心；若点 O 和 C 分居直线两侧，$OA = OB$，且 $\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)$，则点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

事实上，如图 1.10，延长 AO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆（存在且唯一）于点 D，联结 BD，则 $\angle ADB = \angle ACB$，由 $\angle AOB = 2\angle ACB$ 知 $\angle AOB = 2\angle ADB$，所以 $\angle ADB = \angle OBD$，所以 $OD = OA = OB$. O 为 $\triangle ABD$ 的外心，又 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 有相同的外接圆，故点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

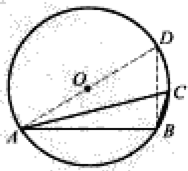


图 1.10

同理可证明后一情形成立.

顺便指出，这个性质可以用来判断一个点是否为三角形的外心.

例 1.1　（1987 年全国初中数学联赛试题）如图 1.11，D 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点，$AD : DC = 2 : 1$，$\angle C = 45°$，$\angle ADB = 60°$，求证：AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

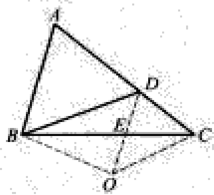


图 1.11

证明　以 BD 为底边作等腰 Rt$\triangle OBD$，使 O 与 C 在 BD 同侧，OD 交 BC 于 E，联结 OC，则由定理 2 易知 O 为 $\triangle BCD$ 的外心. 又

$$\angle DBC = \angle ADB - \angle ACB = 15°$$

所以 $$\angle DOC = 2\angle DBC = 30°$$

所以 $$\angle BOC = 120°$$

所以 $$\angle OCB = \angle OBC = 30° = \angle DOC$$

所以 $$EC = OE = \frac{1}{2}BE$$

所以 $$BE : EC = AD : DC$$

即 $AB \parallel OD$，再由 $\angle BOD = 90°$ 知 $AB \perp OB$. 所以 AB 为 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

例 1.2 （1992 年全国初中数学联赛试题）如图 1.12，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 是底边 BC 上的一点，E 是线段 AD 上的一点，且 $\angle BED = 2\angle CED = \angle A$. 求证：$BD = 2CD$.

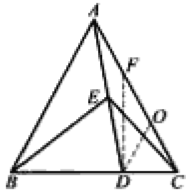


图 1.12

证明 作 $DO \parallel AB$ 交 AC 于 O，则由 $AB = AC$ 知 $OD = OC$，且 $\angle DOC = \angle A = 2\angle DEC$，所以点 O 为 $\triangle EDC$ 的外心，取 F 为 $\triangle EDC$ 的外接圆与 AC 的交点，则 $OF = OC = OD$，且 $\angle ACE = \angle ADF$，所以 $\triangle ACE \backsim \triangle ADF$，所以，$\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE}$，再由 $DO \parallel AB$ 有

$$\angle ADO = \angle BAE, \angle DOC = \angle A = \angle BED$$

所以 $$\angle AOD = \angle BEA$$

所以 $$\triangle ADO \backsim \triangle BAE$$

所以 $$\frac{OD}{AE} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE}$$

所以 $$AF = OD = OC = OF$$

再由 $OD \parallel AB$ 知 $\frac{BD}{DC} = \frac{AO}{OC}$，故 $BD = 2DC$.

定理 3 外心与顶点的连线与其中一边的夹角与该边所对角互余. 如在图 1.8 中，$\angle OBC + \angle A = 90°$.

例 1.3 （第 26 届 IMO 试题）设以 O 为圆心的圆，过 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A 与 C，且与边 AB，BC 分别交于 K 和 N，点 K 与 N 不同，$\triangle ABC$ 与 $\triangle KBN$ 的外接圆交于 B，M.

求证：$\angle OMB = 90°$.

证明 如图 1.13，设 AC 与 KN 相交于点 P，联结 PB 与弧 BNK 相交于点 M'，则由圆幂定理知

$$PC \cdot PA = PN \cdot PK = PM' \cdot PB$$

又 $$PM \cdot PB = PC \cdot PA = PK \cdot PN$$

所以 $$PM' \cdot PB = PM \cdot PB$$

从而知点 M 与 M' 重合.

因为 A,K,N,C 四点共圆，所以 $\angle BNK=\angle A$，又 $\angle BNK=\angle BMK$，所以 $\angle BMK=\angle A$，又由三角形的外心定理 3 知

$$\angle A+\angle KCO=90^\circ$$

下面只须证 $\angle KCO=\angle KMO$.

因为 $\angle BMN=\angle AKN=\angle NCP$，所以 M,N,C,P 四点共圆.

又 $\angle KMC=\angle KMN+\angle NMC=\angle KBN+\angle NPC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{KAC}-\overset{\frown}{KNC})$ 的度数，$\angle KOC=\overset{\frown}{KNC}$ 的度数，所以

$$\angle KMC+\angle KOC=180^\circ$$

所以 K,O,C,M 四点共圆，从而可知结论成立.

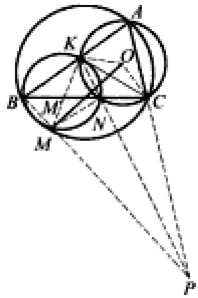


图 1.13

定理 4　设三角形的三条边长，外接圆半径，面积分别为 $a,b,c,R,S_\triangle$，则 $R=\frac{abc}{4S_\triangle}$.

事实上，如图 1.14

$$S_\triangle=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ac\sin B$$

由正弦定理得，$\sin B=\frac{b}{2R}$，所以 $S_\triangle=\frac{abc}{4R}$，故 $R=\frac{abc}{4S_\triangle}$.

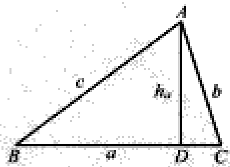


图 1.14

对于其他情形，如钝角三角形或直角三角形，这个结论仍然成立.

定理 5　锐角三角形的外心到三边的距离之和等于其内切圆与外接圆半径之和.

证明　如图 1.15，设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，p,R,r 分别表示 $\triangle ABC$ 半周长、外接圆半径、内切圆半径，由

$$\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}bh_2+\frac{1}{2}ch_3=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr \quad ①$$

又 $A,F,O,E;B,F,O,D;C,D,O,E$ 分别四点共圆，则由托氏定理得

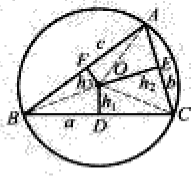


图 1.15

$$R\cdot\frac{a}{2}=\frac{c}{2}\cdot h_2+\frac{b}{2}\cdot h_3$$

$$R \cdot \frac{b}{2} = \frac{c}{2} \cdot h_1 + \frac{a}{2} \cdot h_3$$

$$R \cdot \frac{c}{2} = \frac{a}{2} \cdot h_2 + \frac{b}{2} \cdot h_1$$

以上三式相加得

$$\frac{1}{2}(a+b+c)R = \frac{a}{2}(h_2+h_3) + \frac{b}{2}(h_1+h_3) + \frac{c}{2}(h_1+h_2) \qquad ②$$

由 ① + ② 得 $$pR + pr = p(h_1+h_2+h_3)$$

故 $$h_1+h_2+h_3 = R+r$$

定理6 过 $\triangle ABC$ 的外心 O 任作一直线与边 AB,AC(或延长线)分别相交于 P,Q 两点,则

$$\frac{AB}{AP}\sin 2B + \frac{AC}{AQ}\sin 2C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

证明 如图1.16,延长 AO 交 BC 于 M,交外接圆于 K,延长 CO 交 AB 于 F,则

$$\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ACM}} = \frac{AM \cdot 2R\sin C\sin(90^\circ - \angle AKB)}{AM \cdot 2R\sin B\sin(90^\circ - \angle AKC)} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

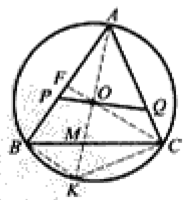


图1.16

同理 $$\frac{AF}{FB} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

对 $\triangle ABM$ 及截线 FOC 应用梅涅劳斯定理,得

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CM} \cdot \frac{MO}{OA} = 1$$

而 $$\frac{BC}{MC} = \frac{BM+MC}{MC} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2B}$$

于是 $$\frac{MO}{OA} = \frac{MC}{BC} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B + \sin 2C}$$

从而 $$\frac{AO}{AM} = \frac{AO}{AO+MO} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

又 $$\frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{AP \cdot AO}{AB \cdot AM}, \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BM}{BC} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B + \sin 2C}$$

$$\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{\sin 2B}{\sin 2B + \sin 2C}$$

由 $$\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} = \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle ABM}} \cdot \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AQO}}{S_{\triangle ACM}} \cdot \frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}} =$$

$$\frac{AP\cdot AO}{AB\cdot AM}\cdot\frac{\sin 2C}{\sin 2B+\sin 2C}+\frac{AQ\cdot AO}{AC\cdot AM}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2B+\sin 2C}$$

即证得结论.

定理 7 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，OD，OE，OF 分别是 O 到 BC，CA，AB 的距离，则

$$\frac{OD}{\cos A}=\frac{OE}{\cos B}=\frac{OF}{\cos C}=R \qquad ③$$

证明 如图 1.17，联结 OB，因为点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，所以 $\angle BOD=\angle A$，所以

$$OD=OB\cos\angle BOD=R\cos A$$

同理 $$OE=R\cos B, OF=R\cos C$$

故式 ③ 成立.

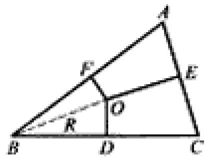


图 1.17

定理 8 若 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，AO，BO，CO 分别与其对边交于 A_1，B_1，C_1，则

$$\frac{AA_1}{\sin B\sin C\sec(B-C)}=\frac{BB_1}{\sin C\sin A\sec(C-B)}=\frac{CC_1}{\sin A\sin B\sec(A-B)}=2R \qquad ④$$

证明 如图 1.18，作 $AH\perp BC$ 于 H，$OD\perp BC$ 于 D，则 $\triangle ODA_1\backsim\triangle AHA_1$，所以

$$\frac{OA_1}{OA_1+R}=\frac{OD}{AH}$$

所以 $$OA_1=\frac{R\cdot OD}{AH-OD}$$

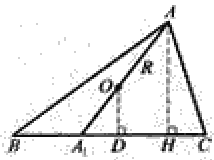


图 1.18

又由式 ③ 知，$OD=R\cos A$，所以

$$AA_1=OA_1+R=\frac{R\cdot AH}{AH-OD}=$$

$$\frac{R\cdot AB\sin B}{AB\sin B-R\cos A}=\frac{2R^2\sin B\sin C}{R(2\sin B\sin C-\cos A)}=$$

$$\frac{2R\sin B\sin C}{\cos(B-C)}=2R\sin B\sin C\sec(B-C)$$

同理 $BB_1=2R\sin C\sin A\sec(C-A)$，$CC_1=2R\sin C\sin A\sec(C-A)$

故式 ④ 成立.

定理 9 三角形的外心和各顶点连线的中点，与相应顶点对边中点所连成的三线共点，且该点恰在三角形的欧拉线上.

证明 如图 1.19，设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，OA，OB，OC 中点分别为 A_1，B_1，

C_1；BC，CA，AB 边的中点依次为 A_0，B_0，C_0.

设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，HA，HB，HC 的中点分别为 A_2，B_2，C_2，则知直线 OH 就是 $\triangle ABC$ 的欧拉线.

联结 A_0B_1，A_0C_1，B_0C_1，B_0A_1，C_0A_1，C_0B_1，易知有

$$A_0B_1 \underline{\parallel} \frac{1}{2}CO,\ B_0A_1 \underline{\parallel} \frac{1}{2}CO$$

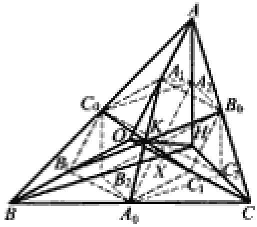


图 1.19

从而，有 $A_0B_1 \underline{\parallel} B_0A_1$.

所以，四边形 $A_0B_0A_1B_1$ 是平行四边形.

不妨设 $▱A_0B_0A_1B_1$ 的对角线 A_0A_1 与 B_0B_1 相交于点 K. 于是，有 $A_0K = A_1K$，$B_0K = B_1K$.

同理 $▱B_0C_0B_1C_1$ 的对角线 B_0B_1 与 C_0C_1 也相交于点 K 且互相平分；

$▱C_0A_0C_1A_1$ 的对角线 C_0C_1 与 A_0A_1 也相交于点 K 且互相平分.

由此表明：A_0A_1，B_0B_1，C_0C_1 三条直线必通过同一点 K(即三线共点).

再联结 A_0B_2，A_0C_2，B_0C_2，B_0A_2，C_0A_2，C_0B_2，则可同理证得 A_0A_2，B_0B_2，C_0C_2 三线也共点(记作 X).

由文[69]中的定理及其推论可知：

A_0A_2，B_0B_2，C_0C_2 三线共点，且该点(X)恰好是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心 X.

而九点圆心(X)在 $\triangle ABC$ 的欧拉线 OH 上，且 $OX = XH$，$A_0X = XA_2$，如图 1.19 所示.

联结 A_1A_2，则在 $\triangle AOH$ 和 $\triangle A_0A_1A_2$ 中，由中位线定理得知 $A_1A_2 \underline{\parallel} \frac{1}{2}OH$，$XK \underline{\parallel} \frac{1}{2}A_1A_2$.

又因点 X 在 $\triangle ABC$ 的欧拉线 OH 上，所以直线 XK 与 OH 重合.

故点 K 必在 $\triangle ABC$ 的欧拉线(OH)上.

例 1.4 (2002 年全国初中数学联赛试题) 如图 1.20，P 为等腰 $\triangle ABC$ 底边上的任意一点，过 P 作两腰的平行线分别与 AB，AC 相交于 Q，R 两点，又 P' 是 P 关于直线 RQ 的对称点. 证明：P' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

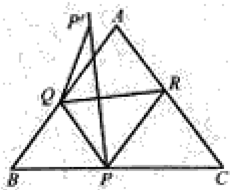


图 1.20

证法 1 如图 1.21，联结 $P'A$，$P'B$，$P'Q$，$P'R$，因为 $AB \parallel PR$，$AR \parallel PQ$，所以

$$AQ = PR,\ AR = PQ$$

9

而 $P'R = PR, P'Q = PQ$

所以 $AQ = P'R, AR = P'Q$

又 $AP' = P'A$

所以

$$\triangle AQP' \cong \triangle ARP' \quad ⑤$$

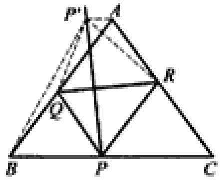


图 1.21

由 $AB = AC$,得

$$\angle B = \angle C \quad ⑥$$

则 $\angle QPB = \angle C = \angle B$

所以 $BQ = PQ = P'Q$

则

$$\angle QBP' = \angle QP'B \quad ⑦$$

但

$$\angle CAP' + \angle AP'B + \angle P'BC + \angle C = 360^\circ \quad ⑧$$

由⑤,⑥,⑦,⑧知 $\angle C + \angle AP'B = 180^\circ$,故 A, P', B, C 四点共圆.

所以 P' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证法 2 如图 1.22,作 $\triangle ABC$ 的外接圆,联结 $P'B$, $P'Q, P'C, P'R$, 由 $PQ \parallel AC$, 知 $\triangle QBP \backsim \triangle ABC$, 则 $\frac{QB}{AB} = \frac{QP}{AC}$,而 $AB = AC$,所以 $QB = QP$,得 $QP = QB = QP'$.

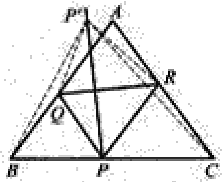


图 1.22

所以 Q 是 $\triangle P'BP$ 的外接圆的圆心,可得

$$\angle PP'B = \frac{1}{2}\angle PQB$$

同理 R 是 $\triangle P'BC$ 的外接圆的圆心,可得

$$\angle PP'C = \frac{1}{2}\angle CRP$$

又由 $PR \parallel AB, PQ \parallel AC$,得

$$\angle PQB = \angle A = \angle CRP$$

所以 $$\angle CP'B = \angle PP'B + \angle CP'P = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle A = \angle A$$

所以 A, P', B, C 四点共圆.

例 1.5 (第 29 届 IMO 预选试题) 如图 1.23,设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,H 为自 A 向边 BC 所引高的垂足,以 AH 为直径的圆,分别交边 AB、AC 于 M, N(且与 A 不同),过 A 作直线 L_A 垂直于 MN,类似地作出直线 L_B 与 L_C. 证明:L_A, L_B, L_C

共点.

证明 如图1.23,联结 HN,则 $HN \perp AC$,过 B 作 $BG \perp AB$,交 L_A 于点 G,考虑 $AG \perp MN$,因为

$$\angle AMN = \angle AHN = \angle C$$

所以 $\angle BAG = 90° - \angle AMN = 90° - \angle C = \angle HAC$

但 $\angle ABG = 90° = \angle AHC$

所以 $\triangle ABG \backsim \triangle AHC \Rightarrow \angle AGB = \angle ACB \Rightarrow A,B,G,C$ 四点共圆,即点 G 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

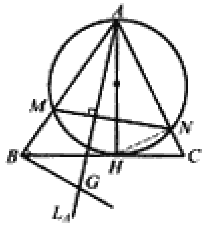


图1.23

因 $\angle ABG = 90°$,故 AG 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径.

这就是说,直线 L_A 必通过 $\triangle ABC$ 的外心.

同理可证直线 L_B 和 L_C 也分别通过 $\triangle ABC$ 的外心.

故三条直线 L_A,L_B,L_C 必然共点,这个公共的点就是 $\triangle ABC$ 的外心.

点评 本题的结论是先证明三条直线中的某一条(如 L_A)通过某个特殊点(如三角形三边中垂线的交点,即外心 O),然后再判定其他两条直线也通过该点,从而达到证明三线共点的目的.这也是证明三线共点的一种常用方法.

练习1

1. 如图1.24,在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,任意延长 CA 到 P,再延长 AB 到 Q,使 $AP = BQ$.求证:$\triangle ABC$ 的外心与 A,P,Q 四点共圆.

2. (第22届俄罗斯数学奥林匹克决赛试题)如图1.25,在等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB = BC$,CD 是它的角平分线,O 是它的外心,过 O 作 CD 的垂线交 BC 于 E,再过 E 作 CD 的平行线交 AB 于 F.证明:$BE = FD$.

3. 如图1.26,设 $\triangle ABC$ 的外心为 O,若 O 关于 BC,CA,AB 的对称点分别为 A',B',C'.求证:

(1) AA',BB',CC' 相交于一点;

(2) 若 BC,CA,AB 的中点分别为 A_1,B_1,C_1,则 P 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心.

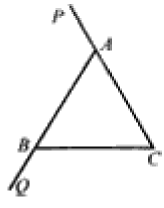


图1.24

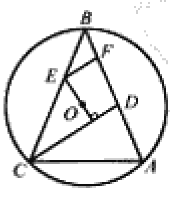


图1.25

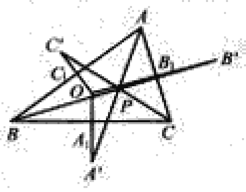


图1.26

第 2 节　三角形垂心的概念和性质

我们知道：过三角形的顶点所作对边的垂线，叫做三角形的高线，在高线上由顶点到垂足的线段叫做三角形的高，如图 1.27，线段 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，AD 所在的直线 h 就是 $\triangle ABC$ 的高线.

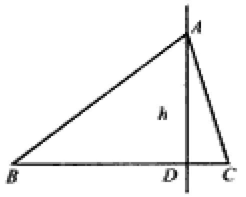


图 1.27

下面，我们按照锐角三角形(图 1.28)、钝角三角形(图 1.29)、直角三角形(图 1.30)这三种情况，分别作出三角形的三条高线，并对所作的图形进行直接观察.

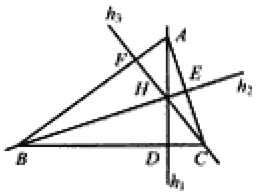


图 1.28

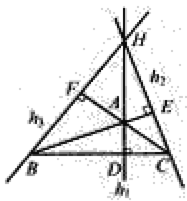


图 1.29

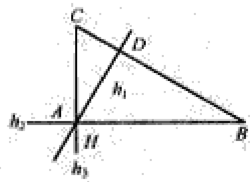


图 1.30

如图 1.28，1.29，1.30 所示，我们看到，所作出的每一种三角形的三条高线都相交于一点 H. 于是，通过对图形的直接观察，我们得到：

任何三角形的三条高线都相交于一点. 三角形的三条高线的交点，叫做三角形的垂心. 三角形的垂心通常用大写英文字母“H”表示.

从上面的图 1.28，1.29，1.30 可以看出：

(1) 锐角三角形的三条高线都在三角形内，因此，锐角三角形的垂心在三角形内部.

(2) 钝角三角形中，钝角所对边上的高在三角形内，其他两条高在三角形外，因此垂心在三角形外.

(3) 直角三角形中，斜边上的高在三角形内，每一条直角边上的高都与另一直角边重合，因此，直角三角形的垂心就是直角顶点.

根据以上事实，我们得到：

三角形垂心定理　三角形的三条高线相交于一点.

如图 1.31，AD，BE，CF 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上的高(高线).

求证：AD，BE，CF 相交于一点.

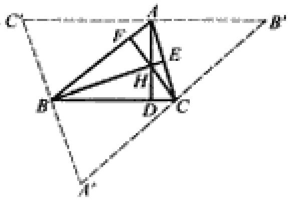


图 1.31

证明　过 $\triangle ABC$ 的顶点 A，B，C 分别作直线 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$，使 $B'C' \parallel BC$，$A'C' \parallel AC$，$A'B' \parallel AB$，则所作的三条直线两两分别相交于点 A'，B'，C'，得到一新的 $\triangle A'B'C'$，且 $AD \perp B'C'$，$BE \perp C'A'$，$CF \perp A'B'$.

又四边形 $ABCB'$，$BCAC'$，$CABA'$ 均是一个平行四边形，从而有

$$AB' = BC = C'A, A'B = CA = BC', B'C = AB = CA'$$

也就是说 A，B，C 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的边 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$ 的中点. 由此可知：AD，BE，CF 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的边 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$ 的中垂线. 根据三角形的外心定理得：这三条直线 AD，BE，CF 必定相交于一点，这个点就是 $\triangle A'B'C'$ 的外心，也是 $\triangle ABC$ 的垂心 H，故三角形的三条高线相交于一点 H.

我们把三角形的三条高的交点 H 叫做三角形的垂心，把这个定理叫做三角形的垂心定理.

在上面的证明过程中，我们的证明思路是：先作一个新的三角形，把 $\triangle ABC$ 的三条高转化为这个新三角形的三条边的中垂线，而三角形的中垂线却是已知为共点的三条直线. 这种证明方法也是证明三线共点的一种常用方法.

根据三角形的垂心定理易知如下一些基本性质：

(1) 三角形的任何两条高线的交点，就是三角形的垂心.

(2) 三角形的两条高线相交于点 H，则第三个顶点与点 H 的连线垂直于第三边.

(3) 若 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，则必有 $AH \perp BC$，$BH \perp CA$，$CH \perp AB$. 也就是说，在这样的四点 A，B，C，H 中，任何两点的连线必垂直于其余两点的连线.

(4) 平面上的四点 A，B，C，D 中，若有一点是其余三点连线所构成的三角形的垂心，如 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心，则这四点中任何一点都必定是其余三点连线所成的三角形的垂心，亦即为若 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心，则 A 为 $\triangle BCD$ 的垂心，B

为△CDA的垂心,C为△DAB的垂心.我们把这样的四点A,B,C,D称为一个垂心组.

(5) 若H为△ABC的垂心,则如图1.32中有$\angle BHC=180°-\angle BAC$,如图1.33中有$\angle BHC=\angle BAC$.

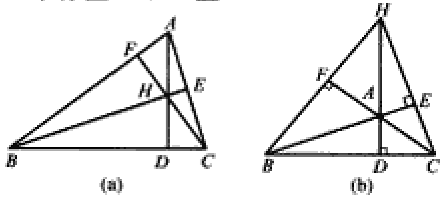


图1.32

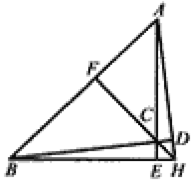


图1.33

请读者仔细观察图1.32,1.33中,思考:

(1) 有哪些角相等或互补?

(2) 有哪些三角形是相似的?

(3) 分别以BC、CA、AB及AH、BH、CH为直径分别作圆,这些圆分别经过D,E,F中的哪点?

对于三角形的垂心除了具备以上基本性质以外,还具备如下性质.

如图1.34,若AD,BE,CF分别为△ABC的三条高,其中D,E,F为垂足,H为垂心,则:

定理1 H,A,B,C四点中任一点是其余三点为顶点的三角形的垂心(称这样的四点为垂心组).

定理2 在△ABC中,有六组四点共圆,有三组(每组四个)相似的直角三角形.如图1.34中,易知分别为:A,E,H,F;B,D,H,F;C,D,H,E;B,C,E,F;C,A,F,D;A,B,D,E分别四点共圆.

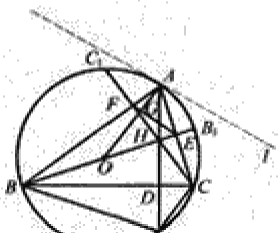


图1.34

Rt△ABE∽Rt△BHF∽Rt△CHE∽Rt△CAF

Rt△BCE∽Rt△BHD∽Rt△AHE∽Rt△ACD

Rt△CAF∽Rt△CHE∽Rt△BHF∽Rt△ABE

且有涉及垂心的等积式为

$$HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF$$

$$AH\cdot AD=AF\cdot AB=AE\cdot AC$$

$$BH\cdot BE=BD\cdot BC=BF\cdot BA$$

$$CH \cdot CF = CE \cdot CA = CD \cdot CB$$

定理 3 垂心 H 关于三边的对称点均在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明 如图 1.34,延长 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1,联结 A_1B,A_1C,则在 $\mathrm{Rt}\triangle BHD$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle BA_1D$ 中

$$\angle A_1BD = \angle A_1BC = \angle A_1AC = \angle HAC = \angle HBD$$

又 BD 为公共边,所以

$$\mathrm{Rt}\triangle BHD \cong \mathrm{Rt}\triangle BA_1D$$

所以 $DH = DA_1$,又 $A_1H \perp BC$.所以 H 关于 BC 的对称点 A_1 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

同理可证:H 关于边 CA 与 AB 的对称点也在 $\triangle ABC$ 的外接圆上,于是结论成立.

由此顺便指出易知:$\triangle A_1BC \cong \triangle HBC$,$\triangle B_1CA \cong \triangle HCA$,$\triangle C_1AB \cong \triangle HAB$,又 $\triangle ABC$,$\triangle A_1BC$,$\triangle B_1CA$,$\triangle C_1AB$ 的外接圆为同一个圆,故得:

定理 4 $\triangle ABC$,$\triangle ABH$,$\triangle BCH$,$\triangle ACH$ 的外接圆是等圆(图 1.34).

定理 5 若点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,则 $OA \perp EF$,$OB \perp FD$,$OC \perp DE$(这个定理也是三角形外心的一个性质(图 1.34)).

证法 1 如图 1.34,因为 B,C,E,F 四点共圆,所以 $\angle AFE = \angle ACB$,由三角形外心定理 3 知,$\angle OAB + \angle ACB = 90°$,所以

$$\angle AFE + \angle OAF = 90°$$

所以 $\angle AGF = 90°$,即 $OA \perp EF$.同理

$$OB \perp FD, OC \perp DE$$

证法 2 如图 1.34,过点 A 作圆 O 的切线 l,则 $\angle KAB = \angle ACB$,又 B,C,E,F 四点共圆,所以 $\angle AFE = \angle ACB$,所以 $\angle KAB = \angle AFE$,所以 $l \parallel EF$.又 $OA \perp l$,所以 $OA \perp EF$,同理 $OB \perp FD$,$OC \perp DE$.

由以上证明顺便可得到:由三角形外心定理 3 知

$$\angle OAB + \angle ACB = 90°, \angle CAD + \angle ACD = \angle CAH + \angle ACB = 90°$$

所以

$$\angle OAB = \angle CAH$$

同理 $\angle OBC = \angle ABH$,$\angle OCB = \angle ACH$.于是有:

定理 6 若 O,H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和垂心,则 $\angle OAB = \angle CAH$,$\angle OBC = \angle ABH$,$\angle OCB = \angle ACH$(这也是三角形外心的一个性质).

例 1.6 (1997 年江苏省初中数学竞赛试题) 锐角 $\triangle ABC$ 的高 AD,BE,CF

交于点 H，AD，BE，CF 的延长线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1，B_1，C_1．求证：

（1）六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的周长等于三条线段 AH，BH，CH 之和的 2 倍．

（2）$R(DE+EF+FD)=2S$，其中 S 为 $\triangle ABC$ 的面积，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径．

证明　（1）如图 1.35，由三角形垂心定理 12 知，$AH=AC_1=AB_1$，$BH=BC_1=BA_1$，$CH=CA_1=CB_1$．

将以上三个等式相加可知（1）结论成立．

（2）由三角形垂心定理 5 知 $OA\perp EF$，所以

$$S_{\text{四边形}OEAF}=\frac{1}{2}OA\cdot EF$$

同理

$$S_{\text{四边形}OFBD}=\frac{1}{2}OB\cdot DF$$

$$S_{\text{四边形}ODCE}=\frac{1}{2}OC\cdot DE$$

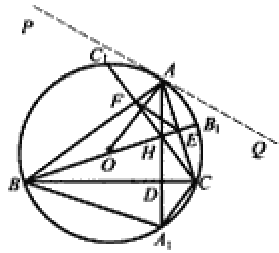


图 1.35

$$S=S_{\triangle ABC}=S_{\text{四边形}OEAF}+S_{\text{四边形}OFBD}+S_{\text{四边形}ODCE}=\frac{1}{2}R(DE+EF+FD)$$

故

$$R(DE+EF+FD)=2S$$

在完成了本题的证明之后，我们不难想到：1986 年全国高中的一道联赛试题：已知锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，点 D，E，F 分别在 BC，CA，AB 上，求证：AD，BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的三条高的充要条件是 $S=\frac{1}{2}R(DE+EF+FD)$，其中 S 表示 $\triangle ABC$ 的面积．

显然本题的必要性就是例 1.6 的第（2）问．现将本题的充分性证明如下：

如图 1.35，（1）先证 $OA\perp EF$，用反证法：若 OA 不垂直 EF，则 $S_{\text{四边形}OEAF}<OA\cdot EF$，又

$$S_{\text{四边形}OFBD}\leqslant\frac{1}{2}OB\cdot FD,S_{\text{四边形}ODCE}\leqslant\frac{1}{2}OC\cdot DE$$

所以

$$S_{\triangle ABC}<\frac{1}{2}R(DE+EF+FD)$$

这与已知条件矛盾，所以 $OA\perp EF$．

（2）过点 A 作圆 O 的切线 PQ，则 $OA\perp PQ$，$OA\perp EF$，所以 $PQ\parallel EF$，所以

$$\angle AFE=\angle PAF=\angle ACB$$

所以 B，C，E，F 四点共圆．

同理 A,B,D,E 与 C,A,F,D 分别四点共圆，所以

$$\angle ADB=\angle AEB,\angle ADC=\angle AFC$$

所以
$$\angle AEB+\angle AFC=180^\circ$$

又 B,C,E,F 四点共圆，$\angle AEB=\angle AFC$，所以

$$\angle AEB=\angle AFC=90^\circ,\angle ADC=\angle AFC=90^\circ$$

即
$$AD\perp BC,BE\perp CA,CF\perp AB$$

综上可知，本题获证.

在以上两题的证明过程中，有关三角形垂心的定理5起了关键性的作用，其实这个结论还是2003年全国高中数学联赛加试试题中平面几何证明题的第(1)问.

定理7 三角形任意一顶点到垂心的距离等于外心到对边距离的2倍.

证明 如图1.36，H,O 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心、外心，作 $OM\perp AC$ 于点 M，$OD\perp BC$ 于点 D，则点 M,D 分别为 AC,BC 的中点，取 CH 的中点 K，联结 KM,KD，则 $KM\parallel AH$，又 $AH\perp BC$，所以 $KM\perp BC$.

又 $OD\perp BC$，所以 $KM\parallel OD$，同理 $DK\parallel OM$.

所以四边形 $ODKM$ 为平行四边形，所以

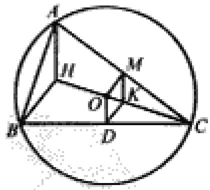


图1.36

$$OD \parallel KM \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AH$$

即
$$OD=\frac{1}{2}AH$$

于是定理7获证，再结合三角形外心定理5可得：

定理8 锐角三角形的垂心到三顶点的距离之和等于其内切圆与外接圆直径之和.

定理9 在非直角三角形中，过 H 的直线交 AB，AC 所在直线分别于 P,Q，则

$$\frac{AB}{AP}\tan B+\frac{AC}{AQ}\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$$

证明 如图1.37，联结 AH 并延长交 BC 于 D，由

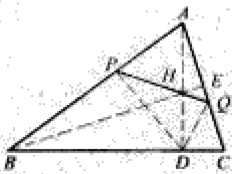


图1.37

$$\frac{AD}{AH}=\frac{AH+HD}{AH}=\frac{S_{\triangle APQ}+S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{S_{\triangle APD}+S_{\triangle AQD}}{S_{\triangle APQ}}=$$

$$\frac{S_{\triangle APD}+S_{\triangle AQD}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{AP}{AD}S_{\triangle ABD}+\frac{AQ}{AC}S_{\triangle ACD}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}S_{\triangle ABC}}=\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BD}{BC}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CD}{BC} \quad ①$$

联结 BH 并延长交 AC 于 E，由 $Rt\triangle AHE \backsim Rt\triangle BCE$，得

$$\frac{AH}{BC}=\frac{AE}{EB}=\frac{1}{\tan A}$$

从而

$$\frac{AD}{AH}=\frac{AD\tan A}{BC}$$

又由 $\frac{AD}{BD}=\tan B, \frac{AD}{CD}=\tan C$ 得

$$\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{BC\tan B}, \frac{CD}{BC}=\frac{AD}{BC\tan C}$$

将其代入式①，得

$$\tan A=\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{1}{\tan B}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{1}{\tan C}$$

两边同乘以 $\tan B\tan C$，注意到在非直角三角形中，有 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$，便有结论成立.

定理 10 三角形的垂心在各角的内、外角平分线上的射影的连线共点，该点恰是三角形的九点圆圆心.

已知：$\triangle ABC$ 的垂心 H 在 $\angle A$ 及其外角平分线 AT，AT' 上的射影分别为 A_1，A_2，过 A_1，A_2 作直线 l_A，并类似做出直线 l_B 和 l_C，如图 1.38 所示.

求证：l_A，l_B，l_C 三线共点，且该点是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心 X.

证明 如图 1.38，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，边 BC，CA，AB 的中点分别为 A_0，B_0，C_0，联结 OA，OB，OC，并延长 $\angle A$ 的角平分线 AT 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 M.

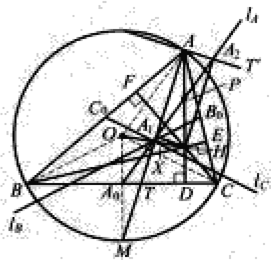


图 1.38

由 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM}$，知 O，A_0，M 三点共线，则 $OA_0\perp BC$.

又 AT，AT' 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 及其外角平分线，所以 $AT\perp AT'$. 又因为 $HA_1\perp A_1A$，$HA_2\perp A_2A$，所以四边形 AA_1HA_2 为矩形. 因此，AH 与 A_1A_2 相等，并在交点 P 互相平分. 于是，有

$$AP=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}A_1A_2=A_1P$$

故

$$\angle PAA_1=\angle PA_1A$$

由 $OA=OM$ 知 $\angle OAM=\angle OMA$，又 $OA_0\perp BC$，$AD\perp BC$ 知 $OA_0 /\!/ AD$，则

$$\angle OAM=\angle OMA=\angle PAA_1=\angle PA_1A$$

所以 $PA_1 /\!/ OA$，即

$$l_A /\!/ OA \qquad ②$$

再联结 OH，在 $\triangle AOH$ 中，易知 P 为 AH 的中点，所以 PA_1 平分 OH，即 A_1A_2 平分 OH。也就是说：直线 l_A 必过 OH 的中点（记为 X）。

同理可证直线 l_B 和 l_C 也必过 OH 的中点 X。

据三角形的九点圆的定义知：OH 的中点 X 就是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心。

所以说直线 l_A，l_B，l_C 三线共点，且该点恰好是 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心。

定理 11 非直角三角形的垂心到各顶点的距离与对应顶点内角余弦值的绝对值的比都相等，都等于三角形外接圆直径。若 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，外接圆的半径为 R，A，B，C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角，则

$$\frac{HA}{|\cos A|}=\frac{HB}{|\cos B|}=\frac{HC}{|\cos C|}=2R \qquad (*)$$

下面分两种情况证明：

(1) 当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，如图 1.39 所示，此时在 $\mathrm{Rt}\triangle AEH$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中

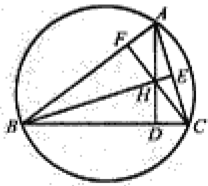


图 1.39

$$AH=\frac{AE}{\sin\angle AHE}=\frac{AB\cos A}{\sin C}=2R\cos A$$

同理 $\quad BH=2R\cos B$，$CH=2R\cos C$

于是可知结论成立。

(2) 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，如图 1.40 所示，此时

$$\angle AHE=\pi-\angle BAC=\pi-\angle A$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEH$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BEH$ 中

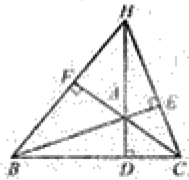


图 1.40

$$AH=\frac{AE}{\sin\angle AHE}=\frac{AC\,|\cos\angle CAE|}{\sin B}$$

$$2R|\cos(\pi-\angle BAC)|=2R|\cos A|$$

同理 $\quad BH=2R\cos B=2R\,|\cos B|$

$$HC=2R\cos C=2R\,|\cos C|$$

于是结论成立。

这个公式 $(*)$ 类似于正弦定理 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R$，因此我们称式 $(*)$ 为"关于三角形垂心的余弦定理"或"垂距余弦公式"，它又可以写成如下等价形式

$$HA=2R\,|\cos B|,HB=2R\,|\cos B|,HC=2R\,|\cos C|$$

下面用定理10再来证明例1.6,事实上如图1.37.

(1) 由公式(*)得

$$AH+BH+CH=2R(\cos A+\cos B+\cos C)$$

又
$$BA_1=2R\sin\angle BAA_1=2R\cos B$$

因此 $C_1B=2R\cos B=CA_1, A_1C=2R\cos C=CB_1, B_1A=2R\cos A=AC_1$

所以
$$A_1C+CB_1+B_1A+AC_1+C_1B+BA_1=$$
$$4R(\cos A+\cos B+\cos C)=2(AH+BH+CH)$$

(2) 因为 A,E,H,F 四点共圆,且 AH 为直径,所以

$$EF=AH\sin A=2R\cos A\sin A=R\sin 2A$$

同理
$$DE=CH\sin C=R\sin 2C, DF=R\sin 2B$$

从而
$$R(DE+EF+FD)=R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

但

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}+2\sin C\cos C=$$
$$2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=$$
$$4\sin A\sin B\sin C$$

故
$$R(DE+EF+FD)=4R^2\sin A\sin B\sin C=2S$$

例1.7 (1992年全国高中数学联赛试题)设 A_1,A_2,A_3,A_4 为圆 O 的内接四边形,H_1,H_2,H_3,H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$,$\triangle A_3A_4A_1$,$\triangle A_4A_1A_2$,$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心,求证:H_1,H_2,H_3,H_4 四点在同一个圆周上,并确定该圆圆心的位置.

证明 如图1.41,联结 A_2H_1,A_1H_2,H_1H_2,设圆 O 的半径为R.在 $\triangle A_2A_3A_4$ 与 $\triangle A_1A_3A_4$ 中,由定理10分别可得

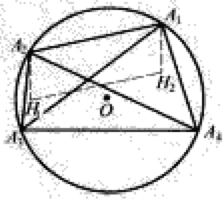


图1.41

$$A_2H_1=2R\mid\cos\angle A_3A_2A_4\mid$$
$$A_1H_2=2R\mid\cos\angle A_3A_1A_4\mid$$

又
$$\angle A_3A_2A_4=\angle A_3A_1A_4$$

所以
$$A_2H_1=A_1H_2$$

又
$$A_2H_1 /\!/ A_1H_2$$

所以 $A_2H_1H_2A_1$ 为平行四边形,A_1H_1 与 A_2H_2 互相平分,同理 A_2H_2 与 A_3H_3 互相平分,A_3H_3 与 A_4H_4 互相平分,所以 $A_1H_1,A_2H_2,A_3H_3,A_4H_4$ 交于同一点 M,即 M 是这四条线段的中点.

由此,以 M 为对称中心时,A_1 与 H_1,A_2 与 H_2,A_3 与 H_3,A_4 与 H_4 分别是关于点 M 对称的点,由 A_1,A_2,A_3,A_4 共圆知 H_1,H_2,H_3,H_4 四点共圆,且圆心 O

是关于中心 M 的对称点，即联结 OM 并延长至 O_1，使 $MO_1 = OM$，则 O_1 即为所求圆心.

如图 1.42，若 AD, BE, CF 分别 $\triangle ABC$ 的三条高，其中 D, E, F 为垂足，H 为垂心，则称 $\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的垂心的垂足三角形，由于三角形垂心的垂足三角形有许多优美的性质，下面我们对垂心的垂足三角形的一些性质作一专门的研究.

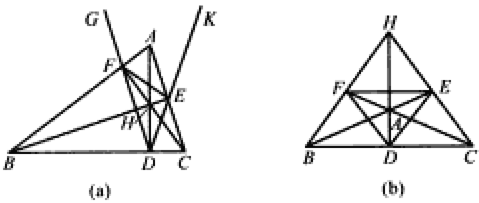


图 1.42

定理 12　锐角三角形的顶点是垂心的垂足三角形的三个旁心，垂心是它的垂足三角形的内心.

事实上，如图 1.42(a)，因为 B, D, H, F 与 C, D, H, E 分别四点共圆，所以

$$\angle HBF = \angle HDF, \angle HCE = \angle HDE$$

又由 B, C, E, F 四点共圆知 $\angle HBF = \angle HCE$，所以 $\angle HDF = \angle HDE$，即 AD 为 $\triangle DEF$ 中 $\angle EDF$ 的内角平分线.

同理 BE 平分 $\angle DEF$，CF 平分 $\angle DFE$，所以 H 为 $\triangle DEF$ 的内心.

如图 1.42(a)，延长 DF, DE.

因为 B, C, E, F 四点共圆，所以 $\angle AFE = \angle ACB$，又因为 C, A, F, D 四点共圆，所以 $\angle BFD = \angle ACB$，所以 $\angle BFD = \angle AFE$，即 AB 是 $\triangle DEF$ 中 $\angle DFE$ 的外角平分线，又 AD 平分 $\angle EDF$，所以点 A 是 $\triangle DEF$ 中 $\angle EDF$ 内的一个旁心，同理点 B, C 也是 $\triangle DEF$ 的旁心，故定理 12 得证.

定理 13　若 $\triangle DEF$ 为锐角三角形，如图 1.42(a)，则易知

$$\angle EDF = 180^\circ - 2\angle A, \angle DEF = 180^\circ - 2\angle B, \angle DFE = 180^\circ - 2\angle C$$

若 $\triangle DEF$ 钝角三角形，不妨设 $\angle A$ 为钝角，如图 1.42(b)，则易知

$$\angle EDF = 2\angle A - 180^\circ, \angle DEF = 2\angle B, \angle DFE = 2\angle C$$

事实上，只要注意到图中的四点共圆，便易得以上结论成立.

以下讨论我们约定：在 $\triangle ABC$ 中，$BC = a, CA = b, AB = c$，面积、内切圆的半径、外接圆的半径以及周长分别为 S, r, R 及 L，$\triangle DEF$ 的面积、内切圆的半

径、外接圆的半径以及周长分别为 S'，r'，R' 及 L'；r_D，r_E，r_F 分别为 $\triangle DEF$ 的三个旁切圆的半径，并且仅针对锐角三角形进行讨论，而对于钝角三角形时类似可得，于是有：

定理 14 锐角三角形的内接三角形(顶点在原三角形的边上)中，以垂心的垂足三角形的周长最短.

证明 如图 1.43，设 $\triangle PQR$ 为 $\triangle ABC$ 的内接圆三角形，分别作点 P 关于 AB，AC 的对称点 P' 和 P''，联结 PP'，PP''，$P'R$，$P''Q$，AP'，AP''，则

$$AP' = AP = AP'', RP' = RP, QP'' = QP$$

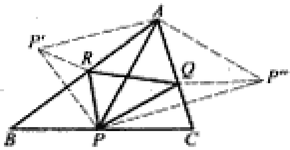


图 1.43

当且仅当 P'，R，Q，P'' 四点共线时，$P'P''$ 取最小值，亦即 $\triangle PQR$ 的周长最小，此时 $\angle P'AP'' = 2\angle A$，于是有

$$P'P'' = \sqrt{2AP^2 - 2AP^2\cos 2A} = 2AP\sin\angle BAC$$

同理，若 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，得 $\triangle DEF$ 的周长等于 $2AD\sin\angle BAC$，由于 $AP \geqslant AD$，从而 $\triangle PQR$ 的周长大于或等于 $\triangle DEF$ 的周长，即垂心的垂足三角形的周长最短.

定理 15 在 $\triangle DEF$ 中

$$EF = a\cos A = R\sin 2A, DF = b\cos B = R\sin 2B, DE = c\cos C = R\sin 2C$$

$$L' = a\cos A + b\cos B + c\cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R\sin A\sin B\sin C$$

$$S' = 2S\cos A\cos B\cos C, R' = \frac{1}{2}R$$

$$r' = 2R\cos A\cos B\cos C = 4R'\cos A\cos B\cos C$$

事实上，如图 1.42(a)，易知 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，所以 $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中

$$\cos A = \frac{AE}{AB}, EF = BC\cos A = a\cos A = 2R\sin A\cos A = R\sin 2A$$

同理 $DF = b\cos B = R\sin 2B, DE = c\cos C = R\cos C$

$$L' = EF + DF + DE = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R\sin A\sin B\sin C$$

$$S' = \frac{1}{2}DF \cdot DE\sin\angle EDF = \frac{1}{2}R\sin 2B \cdot R\sin 2C\sin(180^\circ - 2A) =$$

$$\frac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C = 2(2R^2\sin A\sin B\sin C)\cos A\cos B\cos C =$$

$2S\cos A\cos B\cos C$

$$R' = \frac{EF \cdot DF \cdot DE}{4S'} = \frac{R\sin 2A \cdot R\sin 2B \cdot R\sin 2C}{4 \cdot \frac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C} = \frac{R}{2}$$

由 $S' = P'r'$ 得

$$\frac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C = r' \cdot 2R\sin A\sin B\sin C$$

所以 $$r' = 2R\cos A\cos B\cos C = 4R'\cos A\cos B\cos C$$

又由于 $$\cos A\cos B\cos C = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cos C \leqslant$$

$$\frac{1}{2}(-\cos C+1)\cos C \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(-\cos C+1)+\cos C}{2}\right]^2 = \frac{1}{8}$$

上式等号成立当且仅当

$$\begin{cases}\cos(A-B)=1\\ -\cos C+1=\cos C\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=B\\ \cos C=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow A=B=C=60^\circ$$

即 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

又由

$EF + DF = R(\sin 2A + \sin 2B) =$

$$R \cdot 2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2} = 2R\sin(A+B)\cos(A-B) =$$

$$2R\sin C\cos(A-B) \leqslant 2R\sin C = c$$

同理 $$DF + DE \leqslant a, DF + EF \leqslant b$$

所以 $$2(EF + DF + DE) \leqslant a + b + c$$

即 $L' \leqslant \frac{1}{2}L$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

于是可得:

定理 16 $r_D = 2R\cos A\sin B\sin C, r_E = 2R\sin A\cos B\sin C, r_F = 2R\sin A\sin B\cos C$,由

$$EF = r_D(\cot C + \cot B) = r_D\left(\frac{\cos C}{\sin C} + \frac{\cos B}{\sin B}\right) =$$

$$r_D\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C} = r_D\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

又 $$EF = a\sin 2A$$

所以 $$r_D = 2R\cos A\sin B\sin C$$

同理 $$r_E = 2R\sin A\cos B\sin C, r_F = 2R\sin A\sin B\cos C$$

定理 17 $S' \leqslant \frac{1}{4}S, L' \leqslant \frac{1}{2}L, r' \leqslant \frac{1}{2}R' = \frac{1}{4}R$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时不等号改为等号.

例 1.8 （第 32 届 IMO 试题）如图 1.44，锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的角平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1，与此类似，直线 AA_1 与 $\angle B, \angle C$ 两角的外角平分线交于 A_0，点 B_0, C_0 与此类似.

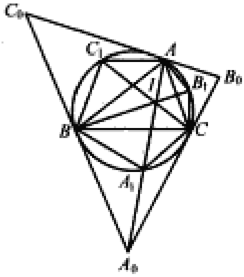


图 1.44

求证：(1) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的两倍.

(2) $\triangle A_0B_0C_0$ 的面积至少是 $\triangle ABC$ 面积的 4 倍.

证明 如图 1.44.

(1) $\angle BIA_1 = \angle ABI + \angle BAI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

$$\angle A_1BI = \angle CBI + \angle CBA_1 = \angle CBI + \angle CAA_1 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

所以 $$\angle BIA_1 = \angle A_1BI$$

所以 $$A_1I = A_1B$$

因为 BB_0, BA_0 分别是 $\angle ABC$ 的内、外角平分线，所以 $BB_0 \perp BA_0$，所以

$$\angle A_1BA_0 = 90^\circ - \angle A_1BI = 90^\circ - \angle BIA_1 = \angle BA_0A_1$$

所以 $$A_1A_0 = A_1B = A_1I$$

于是有 $S_{\triangle A_0BI} = 2S_{\triangle A_1BI}$. 同理可证其他五个类似等式，于是结论成立.

(2) 易证 AA_0, BB_0, CC_0 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的三条高，则 $\triangle ABC$ 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心的垂足三角形.

由垂心的垂足三角形定理 15 知 $S_{\triangle A_0B_0C_0} \geqslant 4S_{\triangle ABC}$.

例 1.9 （第 21 届 IMO 加拿大训练题）如图 1.45，已知 D, E, F 为锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆切点，设 r, R 分别为圆 DEF 与圆 ABC 的半径，$\triangle ABC$ 的内心关于 $\triangle DEF$ 的垂足三角形为 $\triangle KMN$.

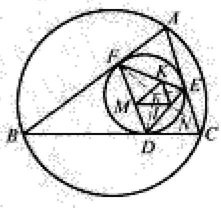


图 1.45

求证：$S_{\triangle KMN} : S_{\triangle ABC} = r^2 : 4R^2$.

证明 如图 1.45，设 I 为 $\triangle DEF$ 的外心，联结 ID, IE, IF 知，$\angle IEA = \angle IFA = 90^\circ$，从而 $\angle A + \angle EIF =$

180°，于是

$$\frac{S_{\triangle EIF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}IE\cdot IF\sin\angle EIF}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}=\frac{IE\cdot IF}{AB\cdot AC}=\frac{r^2}{bc} \quad ①$$

同理

$$\frac{S_{\triangle FIC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r^2}{ca} \quad ②$$

$$\frac{S_{\triangle DIE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r^2}{ab} \quad ③$$

由①+②+③得

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r^2(a+b+c)}{abc}$$

因为

$$\frac{1}{2}r(a+b+c)=S_{\triangle ABC}$$

所以

$$r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$$

所以

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r(a+b+c)}{abc}\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}=\frac{2rS_{\triangle ABC}}{abc}$$

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}$，所以$\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}=\frac{1}{2R}$，即 $S_{\triangle DEF}=\frac{r}{2R}S_{\triangle ABC}$（这是三角形的切点三角形与原三角形的面积关系）.

因为△DEF为△ABC的内切圆，所以$\angle DIE=180°-\angle C$，又因为$EI=DI$，所以

$$\angle EDI=\angle DEI=\frac{\angle C}{2}$$

同理

$$\angle FDI=\angle DFI=\frac{\angle B}{2},\angle FEI=\angle EFI=\frac{\angle A}{2}$$

所以

$$\angle EDF=\angle EDI+\angle FDI=\frac{\angle B+\angle C}{2}=90°-\frac{\angle A}{2}$$

$$\angle DFE=90°-\frac{\angle C}{2},\angle FED=90°-\frac{\angle B}{2}$$

由定理14有

$$S_{\triangle KMN}=2S_{\triangle DEF}\cos\angle EDF\cos\angle DFE\cos\angle FED=2\cdot\frac{rS_{\triangle ABC}}{2R}$$

$$\cos(90°-\frac{A}{2})\cos(90°-\frac{B}{2})\cos(90°-\frac{C}{2})=\frac{rS_{\triangle ABC}}{R}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

因为 $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$$

故 $$S_{\triangle KMN}:S_{\triangle ABC}=r^2:4R^2$$

定理 18 若 r_D,r_E,r_F 分别为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形的三个旁切圆的半径，则有

$$\frac{r_D}{\cot A}=\frac{r_E}{\cot B}=\frac{r_F}{\cot C}=\frac{S}{R}$$

由 $$r_D=2R\cos A\sin B\sin C$$

所以 $$\frac{r_D}{\cot A}=\frac{2R\cos A\sin B\sin C}{\frac{\cos A}{\sin A}}=2R\sin A\sin B\sin C=$$

$$\frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{R}=\frac{S}{R}$$

同理可得 $$\frac{r_E}{\cot B}=\frac{r_F}{\cot C}=\frac{S}{R}$$

故 $$\frac{r_D}{\cot A}=\frac{r_E}{\cot B}=\frac{r_F}{\cot C}=\frac{S}{R}$$

定理 19 AD,BE,CF 分别是 $\triangle ABC$ 三边的高，K,M,N 分别为 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 垂心，则 $\triangle DEF$ 和 $\triangle KMN$ 是全等三角形.

证明 如图 1.46，设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，联结 DM,DN,EN,EK,FK,FM，由已知得 $DH\perp BC$ 且 $FM\perp BC\Rightarrow HD\parallel FM$，$HF\perp AB$ 且 $DM\perp AB\Rightarrow HF\parallel DM$，所以 $HDMF$ 为平行四边形，所以 $HD\underline{\underline{\parallel}}FM$.

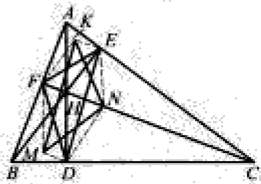


图 1.46

同理 $HD\underline{\underline{\parallel}}EN$，所以 $EN\underline{\underline{\parallel}}FM$.

所以 $EFMN$ 为平行四边形，所以 $EF=MN$.

同理 $ED=NK,DE=KM$，故 $\triangle DEF\cong\triangle KMN$.

定理 20 设 $\triangle DEF$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的关于垂心的垂足三角形，且 $BC=a,CA=b,AB=c$，$\triangle ABC$ 的面积、外接圆半径、内切圆半径分别为 S,R,r. 若 $\triangle AEF,\triangle BDF,\triangle CDE$ 的内切圆圆 I_A，圆 I_B，圆 I_C 的半径依次为 r_A,r_B,r_C，则有

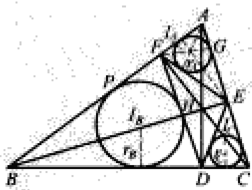


图 1.47

$$r_A\cot\frac{A}{2}+r_B\cot\frac{B}{2}+r_C\cot\frac{C}{2}=\frac{S}{r}-\frac{S}{R}$$

证明 如图1.47,因为 $AD\perp BC,BE\perp CA,CF\perp AB$,则有 A,B,D,E 及 B,C,E,F 分别四点共圆.所以

$$\angle AEF=\angle B=\angle CED$$

同理 $$\angle AFE=\angle C=\angle BFD,\angle BDF=\angle A=\angle CDE$$

联结 AI_A,EI_A,FI_A,并作 $I_AG\perp AC$ 于 G,则有 $I_AG=r_A$.

$$AE=r_A(\cot\angle EAI_A+\cot\angle AEI_A)=r_A(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2})$$

同理 $$AF=r_A(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}),BF=r_B(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})$$

$$BD=r_B(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{A}{2}),CD=r_C(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2})$$

$$CE=r_C(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{B}{2})$$

所以 $$a+b+c=2r_A\cot\frac{A}{2}+2r_B\cot\frac{B}{2}+2r_C\cot\frac{C}{2}+r_A(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})+$$
$$r_B(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2})+r_C(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2})$$

又 $$EF=r_A(\cot\angle I_AEF+\cot\angle I_AFE)=r_A(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2})$$

同理 $$FD=r_B(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}),DE=r_C(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2})$$

所以

$$a+b+c=2r_A\cot\frac{A}{2}+2r_B\cot\frac{B}{2}+2r_C\cot\frac{C}{2}+(DE+EF+FD)\qquad ④$$

由前面的定理14知

$$EF+FD+DE=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4R\sin A\sin B\sin C$$

又 $\triangle ABC$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

所以

$$a+b+c=\frac{2S}{r},EF+FD+ED=\frac{2S}{R}\qquad ⑤$$

由式④,⑤可得

$$2r_A\cot\frac{A}{2}+2r_B\cot\frac{B}{2}+2r_C\cot\frac{C}{2}=\frac{2S}{r}-\frac{2S}{R}$$

故 $$r_A\cot\frac{A}{2}+r_B\cot\frac{B}{2}+r_C\cot\frac{C}{2}=\frac{S}{r}-\frac{S}{R}$$

由上面的证明过程，不难得到以下推论：

推论 $$(p-a)r_A+(p-b)r_B+(p-c)r_C=S$$

事实上：由 $p-a=r\cot\frac{A}{2}$ 知 $\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}$ 等.

代入定理，即得证.

定理21 如图1.48，$\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 三条外角平分线构成的三角形，设 $BC=a, CA=b, AB=c$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$\triangle BCD$，$\triangle ACE$，$\triangle ABF$ 的面积分别为 S_A, S_B, S_C，且 $\triangle ABC$ 的外接圆、内切圆半径分别为 R, r，则有

$$\frac{S_A}{a}+\frac{S_B}{b}+\frac{S_C}{c}=\frac{4R+r}{2}$$

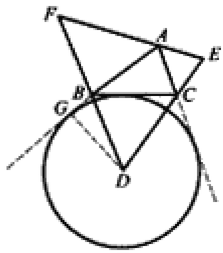


图 1.48

证明 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的内切圆圆 D 与 AB 相切于 G，则

$$BG=AG-AB=\frac{a+b+c}{2}-c=p-c$$

所以 $$BD=\frac{BG}{\cos\angle GBD}=\frac{BG}{\cos\frac{\pi-B}{2}}=\frac{p-c}{\sin\frac{B}{2}}$$

同理 $$CD=\frac{p-b}{\sin\frac{C}{2}}$$

又 $$\angle D=\pi-\angle CBD-\angle BCD=$$
$$\pi-\frac{\pi-B}{2}-\frac{\pi-C}{2}=\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}$$

且 $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$$

所以

$$S_A=\frac{1}{2}BD\cdot CD\sin D=\frac{1}{2}\cdot\frac{p-c}{\sin\frac{B}{2}}\cdot\frac{p-b}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\cos\frac{A}{2}=$$
$$\frac{(p-c)(p-b)\sin A}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{a(p-c)(p-b)}{2r}$$

同理 $$S_B=\frac{b(p-a)(p-c)}{2r},S_C=\frac{c(p-a)(p-b)}{2r}$$

又因为 $ab+bc+ac=p^2+4Rr+r^2$,所以

$$\frac{S_A}{a}+\frac{S_B}{b}+\frac{S_C}{c}=\frac{1}{2r}[(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)]=$$

$$\frac{1}{2r}[3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca]=$$

$$\frac{1}{2r}(3p^2-4p^2+p^2+4Rr+r^2)=\frac{4R+r}{2}$$

定理 22 如图 1.49,$\triangle DEF$ 是由 $\triangle ABC$ 三条外角平分线构成的三角形,设 $BC=a,CA=b,AB=c,p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,$\triangle ABC,\triangle BCD,\triangle ACE,\triangle ABF$ 的内切圆半径分别为 r,r_A,r_B,r_C,$\triangle ABC$ 的面积为 S,则有

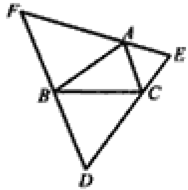


图 1.49

$$r_A\cot\frac{A}{2}+r_B\cot\frac{B}{2}+r_C\cot\frac{C}{2}=\frac{S}{r} \quad ①$$

证明 由已知条件知

$$\angle BCD=\frac{\pi-C}{2},\angle CBD=\frac{\pi-B}{2}$$

$$\angle D=\pi-\frac{\pi-C}{2}-\frac{\pi-B}{2}=\frac{C+B}{2}=\frac{\pi-A}{2}$$

在 $\triangle BCD$ 中由正弦定理得

$$\frac{BC}{\sin D}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$$

所以 $$BD=\frac{a\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2R\sin A\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=4R\sin A\cos\frac{C}{2}$$

同理 $$CD=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

所以 $$BD+CD+a=4R\sin A(\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2})+4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=$$

$$4R\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})$$

这里 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径,记 S_A 为 $\triangle BCD$ 的面积,由

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$$

则 $S_A=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\angle BCD=\frac{1}{2}\cdot 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$

$$8R^2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=8R^2\sin^2\frac{A}{2}\cdot\frac{p}{4R}=2pR\sin^2\frac{A}{2}$$

$$S_A=\frac{1}{2}(BD+CD+a)\cdot r_A$$

所以 $$r_A=\frac{2S_A}{BD+CD+a}=\frac{4pR\sin^2\frac{A}{2}}{4R\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})}=$$

$$\frac{p\cdot\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$$

所以 $$r_A\cot\frac{A}{2}=\frac{p\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$$

同理 $$r_B\cot\frac{B}{2}=\frac{p\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$$

$$r_C\cot\frac{C}{2}=\frac{p\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$$

上述三式相加有

$$r_A\cot\frac{A}{2}+r_B\cot\frac{B}{2}+r_C\cot\frac{C}{2}=\frac{p(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}=p=\frac{S}{r}$$

证毕.

为了进一步研究三角形的面积及其垂足三角形面积之间的关系以及三角形的外心与重心、内心、垂心、旁心的距离问题,再给出:

若 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上的任意一点,由 P 向 $\triangle ABC$ 的三边分别作垂线,垂足分别为 D,E,F,我们把 $\triangle DEF$ 叫做点 P 关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形.关于垂足三角形,我们有:

定理 23 若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,由外接圆内任一点 P 作 $\triangle ABC$ 的垂线 PD,PE,PF.设 $\triangle ABC$ 的面积为 S,点 P 的垂足三角形 DEF 的面积为 S',

点 P 到外接圆圆心 O 的距离为 d,则

$$d^2 = R^2\left(1 - \frac{4S'}{S}\right)$$

若点 P 在外接圆 O 外,则

$$d^2 = R^2\left(1 + \frac{4S'}{S}\right)$$

证明　如图 1.50,联结 AP,BP,CP,设 AP,BP 与外接圆相交于点 A_1,B_1,联结 BA_1.显然 A,E,F,P 和 B,F,P,D 分别四点共圆,则

$$\angle EFP = \angle EAP, \angle PBD = \angle PFD$$

又

$$\angle EAP = \angle CBA_1$$

所以

$$\angle EFD = \angle B_1BA_1$$

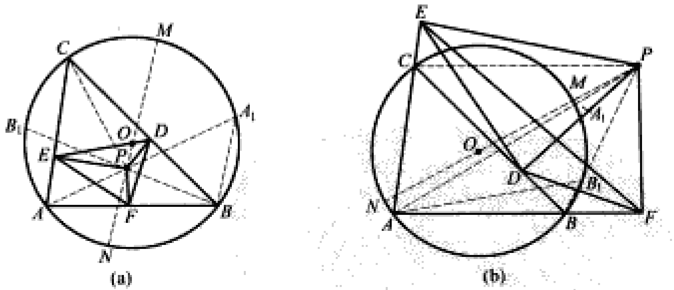


图 1.50

$$S' = \frac{1}{2}FE \cdot FD\sin\angle EFD = \frac{1}{2}FE \cdot FD\sin\angle B_1BA_1$$

又 AP,BP 分别是四边形 $AEPF,BFPD$ 的外接圆直径,由正弦定理,得

$$EF = AP\sin A, DF = BP\sin B$$

因为 $\angle BA_1A = \angle C$,在 $\triangle BPA_1$ 中,由正弦定理,得

$$\frac{BP}{A_1P} = \frac{\sin\angle BA_1A}{\sin\angle PBA_1} = \frac{\sin C}{\sin\angle A_1BB_1}$$

即

$$BP\sin\angle A_1BB_1 = A_1P\sin C$$

所以 $S' = \frac{1}{2}FE \cdot FD\sin\angle B_1AA_1 = \frac{1}{2}AP\sin A \cdot BP\sin B\sin\angle A_1BB_1 =$

$$\frac{1}{2}AP \cdot A_1P\sin A\sin B\sin C = \frac{AP \cdot A_1P}{4R^2}S$$

即

$$S' = \frac{AP \cdot A_1P}{4R^2}S \quad ⑦$$

又设 $PO = d$，联结 PO 交圆周于 M, N，则由圆幂定理，知

$$AP \cdot A_1P = MP \cdot PN = (R + d)[\pm(R - d)] = \pm(R^2 - d^2)$$

上式中，当点 P 在圆内时取正号，点 P 在圆外时取负号，由此得

$$S' = \pm\frac{R^2 - d^2}{4R^2}S$$

化简整理，得

$$d^2 = \pm R^2\left(1 \mp \frac{4S'}{S}\right) \quad ⑧$$

这里，当点 P 在圆内时取负号，点 P 在圆外时取正号.

特别地，当点 P 在三角形的外接圆上时，则 $d = PO = R$，由⑧得 $S' = 0$. 此即表明：若由三角形外接圆上任一点向三角形三边作垂线，所得的垂足三角形的面积为 0. 也就是说，这三个垂足在一条直线上. 这条直线就是著名的西姆松线.

这个公式还表明：若已知 $\triangle ABC$ 所在平面一点与外心 O 的距离为 d，就可求出点 P 关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形的面积 S' 与 $\triangle ABC$ 的面积 S 之间的关系，反过来，若能求得 $\triangle ABC$ 所在平面上一点 P，关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形面积 S' 与 $\triangle ABC$ 的面积 S 之间的关系，就可以求出点 P 与 $\triangle ABC$ 的外心之间的距离. 下面就来研究这两个方面的问题. 首先指出，在求点 P 关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形面积 S' 和 $\triangle ABC$ 面积的比值时，往往用公式⑦会更方便些，事实上，只须用 $\triangle ABC$ 的三边长（或半周长）或内切圆、外接圆半径表示 $AP \cdot PA_1$ 就可以了.

(1) 我们已知垂心的垂足三角形面积 $S_H = \pm 2S\cos A\cos B\cos C$（其中负号表示 $\triangle ABC$ 为钝角三角形），则

$$\begin{aligned} OH^2 = d^2 = R^2\left(1 \mp \frac{4S_H}{S}\right) &= R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C) = \\ &R^2[9 - 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)] = \\ &R^2\left(9 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2}\right) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

即 $$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C) = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

(2) 如图 1.51，若点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心 G，则 $AG = \frac{2}{3}m_a$，$GQ = \frac{1}{3}m_a$，由相交弦定理得 $QA_1 = \frac{a^2}{4m_a}$，所以

$$AP \cdot PA_1 = AG \cdot GA_1 =$$

$$\frac{2}{3}m_a\left(\frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}\right) = \frac{1}{18}(4m_a^2 + 3a^2)$$

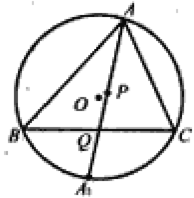


图 1.51

又 $$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

所以 $$AP \cdot PA_1 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

所以 $$\frac{S_G}{S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36R^2}$$

又点 G 在 $\triangle ABC$ 内，所以

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(3) 若点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心 I 时，显然点 I 关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形就是 $\triangle ABC$ 的切点三角形，而切点 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之间有关系式：$\frac{S_I}{S} = \frac{r}{2R}$，又点 I 在 $\triangle ABC$ 内，代入公式得

$$OI^2 = d^2 = R^2\left(1 - \frac{4r}{2R}\right) = R^2 - 2Rr$$

即 $$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

(4) 若点 P 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁心 I_a 时，显然点 I_a 关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形就是旁切圆圆 I_a 与 $\triangle ABC$ 的三边相切的切点所组成的三角形. 用类似于推导切点三角形的性质可得

$$\frac{S_{I_a}}{S} = \frac{r_a}{2R}$$

又点 I_a 在 $\triangle ABC$ 的外部，代入公式得

$$OI_a^2 = d^2 = R^2\left(1 + \frac{4r_a}{2R}\right) = R^2 + 2Rr_a$$

即 $$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$$

同理可得 $$OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b, OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c$$

综上可知：利用式 ⑧ 求得了三角形的外心与内心、垂心、重心及旁心的距离计算公式，并且得到了三角形的内心 I，重心 G，垂心 H 以及旁心 I_a、I_b、I_c 关于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形的面积与 $\triangle ABC$ 的面积 S 之间的关系为：当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，有

$$\frac{S_H}{S} = 2\cos A\cos B\cos C =$$

$$-2 + (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2}{4R^2}$$

即
$$S_H = \frac{a^2+b^2+c^2-8R^2}{4R^2}S$$

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，同理有
$$S_H = \frac{8R^2-(a^2+b^2+c^2)}{4R^2}S$$

$$S_G = \frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}S, S_I = \frac{r}{2R}S, S_{I_a} = \frac{r_a}{2R}S, S_{I_b} = \frac{r_b}{2R}S, S_{I_c} = \frac{r_c}{2R}S$$

由于
$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

则
$$S_{I_a} + S_{I_b} + S_{I_c} - S_I = \left(\frac{r_a}{2R} + \frac{r_b}{2R} + \frac{r_c}{2R} - \frac{r}{2R}\right)S = (r_a + r_b + r_c - r)\frac{S}{2R} = 2S$$

即 $S_{I_a} + S_{I_b} + S_{I_c} - S_I = 2S$，这是三角形的内心、旁心关于原三角形的垂足三角形的面积的一个关系式.

又由欧拉定理知：$OH^2 = 9 \cdot OG$，因此，当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时（此时垂足 H 在外接圆内），则

$$R^2\left(1-\frac{4S_H}{S}\right) = 9 \cdot R^2\left(1-\frac{4S_G}{S}\right)$$

化简即得
$$9S_G - S_H = 2S$$

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时（此时垂足 H 在外接圆外），则
$$R^2\left(1+\frac{4S_H}{S}\right) = 9 \cdot R^2\left(1-\frac{4S_G}{S}\right)$$

化简即得
$$9S_G + S_H = 2S$$

当 $\triangle ABC$ 是直角三角形时（此时垂足 H 在外接圆上），则 $S_H = 0$，于是，得 $9S_G = 2S$.

由以上讨论可知：公式 ⑧ 也是一个普遍意义的关系式，利用它还可以推出许多关于三角形及垂足三角形面积的恒等式和不等式.

例 1.10 （1989 年加拿大奥赛训练题）如图 1.52，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，D, E, F 分别为 BC, CA, AB 的中点，一个以 H 为圆心的圆交直线 DE 于 P, Q，交直线 EF 于 R, S，交直线 FD 于 T, U. 证明：$CP = CQ = AR = AS = BT = BU$.

证明 设 AL, BM, CN 为 $\triangle ABC$ 的三条高，AL 交中位线 EF 于 K，则 K 为 AL 的中点，且 AK 垂直平分 SR，故 $AS = AR$. 同理 $BT = BU$，$CP = CQ$.

下面证明 $AR = BT = CP$.

设圆 H 的半径为 r，则

$$AR^2 = AK^2 + KR^2 = AK^2 + r^2 - HK^2 =$$
$$r^2 + AH(AK - HK) = r^2 + AH \cdot HL$$

同理 $BT^2 = r^2 + BH \cdot HM, CP^2 = r^2 + CH \cdot HN$

而 $$AH \cdot HL = BH \cdot HM = CH \cdot HN$$

故 $$AR = BT = CP$$

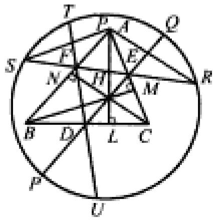


图 1.52

例 1.11 (1998 年 CMO 试题) 设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点,且满足条件:$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$,试确定点 D 的几何位置,并证明你的结论.

证明 如图 1.53,作 $ED \mathrel{\underline{\parallel}} BC, AF \mathrel{\underline{\parallel}} ED$,则四边形 $ADEF$ 与 $DCBE$ 是平行四边形,联结 BF, AE,则四边形 $AFBC$ 也是平行四边形. 于是,$AF = ED = BC, EF = AD, EB = DC, FB = AC$. 在四边形 $AFEB$ 和四边形 $AEBD$ 中,由托勒密定理,有

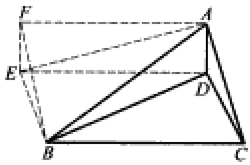


图 1.53

$$AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant AE \cdot FB$$
$$AD \cdot EB + AE \cdot BD \geqslant AB \cdot ED$$

所以

$$AB \cdot AD + BC \cdot DC \geqslant AE \cdot AC \quad ⑨$$
$$AD \cdot DC + AE \cdot BD \geqslant AB \cdot BC \quad ⑩$$

综合 ⑨⑩ 两式可得

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA =$$
$$DB(DA \cdot AB + DC \cdot CB) + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant$$
$$DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot CA =$$
$$AC \cdot (DB \cdot AE + DC \cdot DA) \geqslant AC \cdot AB \cdot BC$$

等号成立的充分必要条件是 ⑨ 与 ⑩ 同时取等号,即四边形 $ABEF$ 与四边形 $AEBD$ 均为圆内接四边形,所以五边形 $ADBEF$ 为圆内接五边形. 由于四边形 $ADEF$ 为平行四边形,故四边形 $ADEF$ 为矩形,故 $AD \perp ED$,故 $AD \perp BC$,且 $\angle EBA = \angle EDA = 90°$,故 $DC \perp AB$,所以点 D 为 $\triangle ABC$ 垂心.

练习 2

1. (2000 年上海市初中数学竞赛试题) 在 $\triangle ABC$ 中,$AB = 5, BC = 6, CA = 7, H$ 为垂心,则 AH 的长为________.

2. (1998 年上海市竞赛试题) 如图 1.54,锐角 $\triangle ABC$ 中,已知 H 为垂心,AD

为 BC 边上的高，E 为 BC 的中点，若 $AD=BC=5$，试求 $HD+HE$ 的长.

3.（1993 年全国初中数学联赛试题）设 H 是等腰 $\triangle ABC$ 的垂心，在底边 BC 保持不变的情况下，让顶点 A 至底边 BC 的距离变小，这时 $S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle HBC}$ 的值变小，变大，还是不变？证明你的结论.

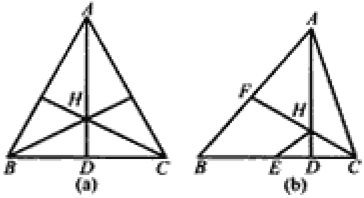


图 1.54

第 3 节　三角形重心的概念和性质

我们知道，三角形的顶点与其对边的中点连线，叫做三角形的中线. 如图 1.55，线段 AD，BE 就是 $\triangle ABC$ 的两条中线，其中点 D 是边 BC 的中点，点 E 是边 AC 的中点；AD，BE 分别是边 BC，CA 上的中线.

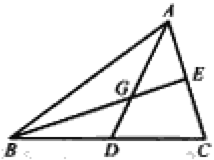


图 1.55

我们还知道，一个三角形有三条中线，其中任意两条中线必相交于一点，试问这三条中线是否相交于一点呢？

我们先来作出三条中线，可以看出：如图 1.56，锐角三角形的三条中线相交于一点；

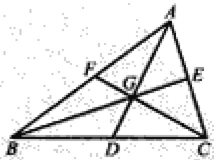


图 1.56

在图 1.57 中，钝角三角形的三条中线也相交于一点；

在图 1.58 中，直角三角形的三条中线还是相交于一点.

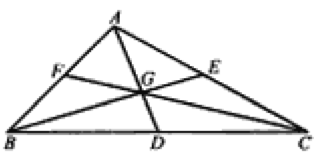


图 1.57

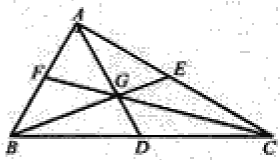


图 1.58

通过实际作图，综合以上三种情况，得到如下结论：

三角形重心定理　三角形的三条中线相交于一点，这个交点到顶点的距离是它到对边中点距离的 2 倍.

已知：D，E，F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 的中点.

求证：AD，BE，CF 相交于一点 G，且

$$AG = 2GD, BG = 2GE, CG = 2GF$$

证法1 如图1.59，D,E,F 为三边中点，设 BE,CF 交于 G，联结 EF，则 $EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$，$\triangle GEF \backsim \triangle GBC$，所以

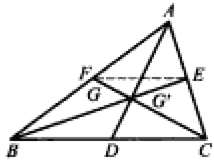


图1.59

$$\frac{GE}{GB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FG}{CG}$$

由 $BC = 2EF$，得

$$GB = 2GE, GC = 2GF$$

设 AD,BE 交于 G'，同理可证

$$G'B = 2G'E, G'A = 2G'D$$

即 G,G' 都是 BE 上从 B 到 E 的三分之二处的点，故 G,G' 重合，即三条中线 AD，BE,CF 相交于一点 G.

上面的证明过程中，我们的证题思路是：判定 BE,CF 的交点与 AD,BE 的交点重合于一点 G，这也是证明三点共线问题的一种常用方法.

证法2 如图1.60，设 BE,CF 交于 G，BG,CG 中点为 H,I，联结 HI,HF,EF,EI，则 $EF \mathrel{\underline{\parallel}} HI \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$，所以 $EFHI$ 为平行四边形，所以

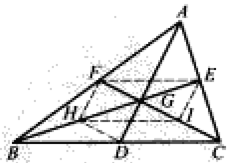


图1.60

$$HG = GE, IG = GF, GB = 2GE, GC = 2GF$$

又 $$HD \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CG \mathrel{\underline{\parallel}} GF \Rightarrow \square GFHD$$

所以 $FH \mathrel{\underline{\parallel}} GD$，又 $FH \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AG$，所以 A,G,D 共线，且有 $DG = \frac{1}{2}AG$，即 $AG = 2GD$.

推论 若直线 PQ 分别与 $\triangle ABC$ 的边 AB,AC 所在直线交于 P,Q 两点，且过其重心 G，则顶点 B,C 到直线 PQ 的距离之和等于顶点 A 到此直线的距离.

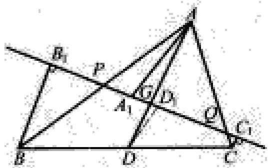


图1.61

事实上，如图1.61，作 $DD_1 \perp PQ$ 于 D_1，则由已知得四边形 BCC_1B_1 为直角梯形，DD_1 为中位线，所以 $BB_1 + CC_1 = 2DD_1$，由 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1G \backsim \mathrm{Rt}\triangle DD_1G$ 及 $AG = 2DG$ 知 $AA_1 = 2DD_1$，所以

$$BB_1 + CC_1 = AA_1$$

在本证法中,我们的证明思路是:将证明三线共点问题转化为证明三点共线问题,再用证明三点线的方法给出证明.

三角形的三条中线相交于一点.我们把三角形的三条中线的交点,叫做三角形的重心,通常用大写英文字母"G"表示三角形的重心.

根据三角形的重心定理,可以知道:

(1) 三角形中两条中线的交点,就是三角形的重心,由于任何三角形的三条中线均在三角形内,因此,三角形的重心必在三角形内.

(2) $\triangle ABC$ 的重心 G 到 BC 边的中点的距离 GD 等于中线 AD 之长的 $\frac{1}{3}$,从而 G 到 BC 的距离 GH 等于高 AK 长的 $\frac{1}{3}$,如图 1.62 所示.

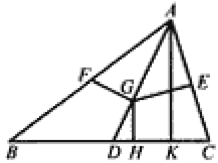


图 1.62

(3) 过三角形的重心 G 所作平行于一边的直线,把原三角形分成两部分(其中一个为三角形,另一个为梯形),这两部分的面积之比为 4 : 5.

(4) D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的各边 BC、CA、AB 的中点,$\triangle ABC$ 的重心 G 就是 $\triangle DEF$(这样的 $\triangle DEF$ 也称为 $\triangle ABC$ 的中点三角形)的重心.

(5) 联想到三角形的垂心,已知三角形的同一边上的中线和高(线),一般并不重合(一般三角形的中线长不小于三角形的高),而且,当一条中线和高相重合时,三角形的重心也不一定重合,只有当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,底边的高(线)与中线重合,此时,重心与垂心一般不重合,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,同一边上的高与中线重合,且三角形的重心与垂心重合,进一步联想到正三角形的中心、外心与重心的这种关系也类似于重心与垂心的关系.

对于三角形的重心除了具备以上基本性质外,还具备如下性质:

定理1 若点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则 $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CAG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$,反之亦然.

证明 如图 1.55,由等底等高的三角形面积相等知

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}, S_{\triangle BGD} = S_{\triangle CGD}$$

所以
$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle CBG}$$

同理
$$S_{\triangle CAG} = S_{\triangle BCG}$$

所以
$$S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CAG} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$$

反之,若 $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CAG}$,则延长 AG 交 BC 于点 D',由于 $S_{\triangle ABG} =$

$S_{\triangle CAG}$，AG 为公共底边，这说明点 B 与点 C 到 AD' 的距离相等，作 $BH \perp AD'$ 于 H，$CK \perp AD'$ 于 K，则有 $\mathrm{Rt}\triangle BHD' \cong \mathrm{Rt}\triangle CKD'$，所以 $BD' = D'C$，从而可知 D' 为 BC 的中点，即为点 D；同理可知，点 E 为 CA 中点，点 F 为 AB 中点.

事实上，由以上证明还可得：$S_{\triangle BGD} = S_{\triangle CGD} = S_{\triangle CGE} = S_{\triangle EGA} = S_{\triangle AGF} = S_{\triangle FGB} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$，由此可得 $AG = 2GD$ 等.

定理 2　若 AD，BE，CF 分别为 $\triangle ABC$ 的三条中线，则

$$AD^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2$$

$$BE^2 = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2) - \frac{1}{4}AC^2$$

$$CF^2 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2) - \frac{1}{4}AB^2$$

且
$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)^2$$

证明　如图 1.55，在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，分别由余弦定理得

$$\cos\angle ADB = \frac{AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 - AB^2}{2AD \cdot \frac{1}{2}BC}, \cos\angle ADC = \frac{AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 - AC^2}{2AD \cdot \frac{1}{2}BC}$$

又
$$\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$$

所以
$$\cos\angle ADB + \cos\angle ADC = 0$$

即
$$AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 - AB^2 + AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 - AC^2 = 0$$

所以
$$AD^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2$$

同理
$$BE^2 = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2) - \frac{1}{4}CA^2$$

$$CF^2 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2) - \frac{1}{4}AB^2$$

以上三式相加得

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)^2$$

定理 3　若 AD，BE，CF 分别为 $\triangle ABC$ 三条中线，则以 AD，BE，CF 为三边可组成三角形，且其面积为 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{3}{4}$ 倍.

证明 如图 1.63,过点 A 作 $AH \underline{\parallel} FC$,联结 HC, HD, HE, DE,则四边形 $AHCF$ 为平行四边形,且 $HC \underline{\parallel} AF \underline{\parallel} ED$,所以四边形 $CDEH$ 为平行四边形,所以 $CD \underline{\parallel} HE$,所以 $EH \underline{\parallel} BD$,所以四边形 $BDHE$ 为平行四边形,所以 $BE = DH$,又 $CF = AH$,所以 $\triangle ADH$ 是 $\triangle ABC$ 的三条中线 AD, BE, CF 为边长构成的三角形,且

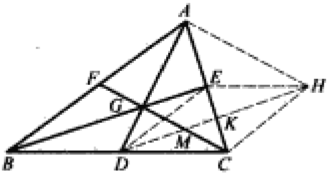


图 1.63

$$S_{\triangle ADH} = S_{\triangle AHK} + S_{\triangle ADK} = 2(S_{\triangle ACH} - S_{\triangle CHK}) =$$
$$2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$$

于是结论成立.

定理 4 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,过 G 作 $DE \parallel BC$ 交 AB 于 D,交 AC 于 E;过 G 作 $PF \parallel CA$ 交 AB 于 P,交 BC 于 F;过 G 作 $KH \parallel AB$ 交 AC 于 K,交 BC 于 H,则

(1) $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{FP}{CA} = \dfrac{KH}{AB} = \dfrac{2}{3}$;

(2) $\dfrac{DE}{BC} + \dfrac{FP}{CA} + \dfrac{KH}{AB} = 2$.

证明 (1) 如图 1.64,由三角形重心定理得:$AG = \dfrac{2}{3}AM$,又 $DE \parallel BC$,所以

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

同理 $$\frac{FP}{CA} = \frac{KH}{AB} = \frac{2}{3}$$

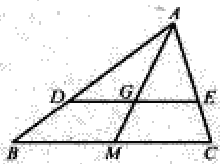


图 1.64

(2) 将以上三个关系式相加即可得结论.

定理 5 若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则

(1) $BC^2 + 3GA^2 = CA^2 + 3GB^2 = AB^2 + 3GC^2$;

(2) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$;

(3) $GA^2 + GB^2 + GC^2$ 为最小值.

证明 利用三角形重心定理及性质可得知(1)、(2)成立,下面证明式(3),设点 M 为平面上任意一点,联结 MA, MD, MG.

如图 1.65,取 AG 中点 H,联结 MH,在 $\triangle AGM$ 与 $\triangle DHM$ 中,分别利用性质可得

$$MH^2 = \frac{1}{4}(2MG^2 + 2MA^2 - AG^2) \qquad ①$$

$$MG^2 = \frac{1}{4}(2DM^2 + 2MH^2 - DH^2) = \frac{1}{4}(2DM^2 + 2MH^2 - GA^2) \qquad ②$$

把①代入②并注意到

$$DG = \frac{1}{3}AD, GA = \frac{2}{3}AD$$

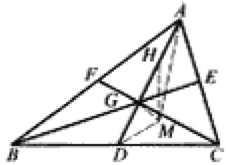


图 1.65

化简整理得

$$MG^2 = \frac{1}{3}MA^2 + \frac{2}{3}MD^2 - \frac{2}{9}AD^2 \qquad ③$$

在 $\triangle MBC$ 中

$$MD^2 = \frac{1}{2}(MB^2 + MC^2) - \frac{1}{4}BC^2 \qquad ④$$

在 $\triangle GBC$ 中

$$GD^2 = \frac{1}{2}(GB^2 + GC^2) - \frac{1}{4}BC^2 \qquad ⑤$$

把④,⑤代入③,并注意到 $AD^2 = 9GD^2$,化简整理,得

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2$$

由此可知 $$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2$$

等号当且仅当 M 与 G 重合时成立.

而且可知:到三角形顶点距离的平方和为最小值的点是三角形的重心.

定理6 若点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,$\triangle ABC$ 内的点在边 BC, CA, AB 上的射影分别为 D, E, F,则当 Q 与 G 重合时,$QD \cdot QE \cdot QF$ 最大,反之亦然.

证明 设三角形三内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边长分别为 $a, b, c, QD = x, QE = y, QF = z$,由 $S_{\triangle QBC} = \frac{1}{2}ax, S_{\triangle QBC} = \frac{1}{2}by, S_{\triangle QAB} = \frac{1}{2}cz$,知 $ax + by + cz = 2S_{\triangle ABC}$ 为定值,由三个正数平均值不等式,得

$$ax \cdot by \cdot cz \leqslant \left(\frac{ax + by + cz}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}S^3_{\triangle ABC}$$

即 $$xyz \leqslant \frac{8S^3_{\triangle ABC}}{27abc}$$

此式当且仅当 $ax = by = cz$ 时,即 $S_{\triangle QBC} = S_{\triangle QCA} = S_{\triangle QAB}$ 时等号取得,即 Q 为 $\triangle ABC$ 为重心时,结论成立.

定理7 若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,且 $AG^2 + BG^2 = CG^2$,则两中线 AD 和 BE 互相垂直;反之,若两中线 AD, BE 互相垂直,则 $AG^2 + BG^2 = CG^2$.

证明 如图 1.66,延长 GF 到 H,使 $FH=FG$,联结 HA,HB,则四边形 $AGBH$ 为平行四边形. 且 $GH=CG$,$BH=GA$,于是有 $AG^2+BG^2=CG^2 \Leftrightarrow BH^2+BG^2=GH^2 \Leftrightarrow \angle HBG=90° \Leftrightarrow BH\perp BG \Leftrightarrow AD\perp BE$,故结论成立.

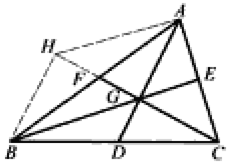


图 1.66

定理 8 若 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R,重心为 G,G 到三边 BC,CA,AB 的距离分别为 GD,GE,GF,则

$$\frac{GD}{\sin B\sin C}=\frac{GE}{\sin A\sin C}=\frac{GF}{\sin A\sin B}=\frac{2R}{3}$$

证明 如图 1.67,联结 AG 交 BC 于 A',作 $AH\perp BC$ 于 H,则由 $\mathrm{Rt}\triangle GA'D \backsim \mathrm{Rt}\triangle AA'H$ 及三角形重心定理得

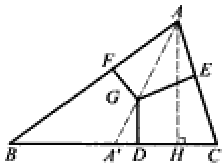


图 1.67

$$\frac{GD}{AH}=\frac{GA'}{AA'}=\frac{1}{3}$$

$$GD=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}AB\sin B=\frac{2}{3}R\sin B\sin C$$

同理 $$GE=\frac{2}{3}R\sin C\sin A,GF=\frac{2}{3}R\sin A\sin B$$

故结论成立.

定理 9 (《数学通报》12(1985) 上征解题 387) 若 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,AG,BG,CG 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 D,E,F,则

$$\frac{AG}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CG}{GF}=3$$

证明 如图 1.68,设 $BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,三条中线长分别为 m_a,m_b,m_c,且 AD 与 BC 交点 Q,则由相交弦定理,得

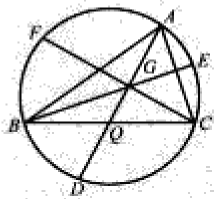


图 1.68

$$AD\cdot QD=BD\cdot QC \Rightarrow QD=\frac{a^2}{4m_a}$$

$$\frac{AG}{GD}=\frac{\frac{2}{3}m_a}{\frac{1}{3}m_a^2+\frac{a^2}{4m_a}}$$

由性质知 $$m_a^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2$$

所以 $$\frac{AG}{GD}=\frac{2m_a^2}{m_a^2+\frac{3}{4}a^2}=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

同理 $$\frac{BG}{GE}=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{a^2+b^2+c^2},\frac{CG}{GF}=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

故 $$\frac{AG}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CG}{GF}=3$$

定理 10 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，过 G 的直线交 AB 于 P，交 AC 于 Q，则 $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$；反之，在 $\triangle ABC$ 中，若直线 PQ 交 AB 于 P，交 AC 于 Q，满足 $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$，则直线 PQ 过三角形的重心.

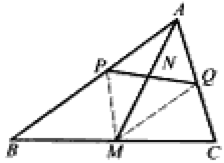


图 1.69

证明 如图 1.69，设 M 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任一点，直线 PQ 分别交 AB，AM，AC 于 P，N，Q，联结 PM，QM，则

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AM+AN}{AN}=\frac{S_{\triangle APQ}+S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle APQ}}=\frac{\frac{AP}{AB}\cdot S_{\triangle ABM}+\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ACM}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}\cdot S_{\triangle ABC}}=$$

$$\frac{AB}{AP}\cdot\frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CM}{BC}+\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BM}{BC}$$

当 N 为 $\triangle ABC$ 的重心时，M 为 BC 中点，有 $BM=MC$，且 $AM:AN=3:2$，由此即证得结论 $\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=3$.

反之，设 $\triangle ABC$ 的一边 AB 上有 P_1，P_2 两点，在另一边 AC 上有 Q_1，Q_2 两点，若 $\frac{AB}{AP_1}+\frac{AC}{AQ_1}=\frac{AB}{AP_2}+\frac{AC}{AQ_2}=3$，则 P_1Q_1 与 P_2Q_2 的交点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.（《数学通报》1212 号问题）

事实上，如图 1.70，联结 AG 并延长交 BC 于 M，过 B，C 分别作 AM 的平行线交直线 P_1Q_1，P_2Q_2 分别于 X_1，Y_1；X_2，Y_2，于是，由

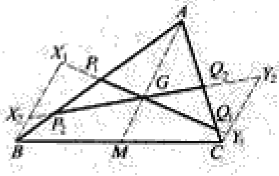


图 1.70

$$\frac{AB}{AP_1}+\frac{AC}{AQ_1}=\left(1+\frac{BP_1}{AP_1}\right)+\left(1+\frac{CQ_1}{AQ_1}\right)$$

有 $$1=\frac{BP_1}{AP_1}+\frac{CQ_1}{AQ_1}=\frac{BX_1}{AG}+\frac{CY_1}{AG}$$

同理 $$1=\frac{BP_2}{AP_2}+\frac{CQ_2}{AQ_2}=\frac{BX_2}{AG}+\frac{CY_2}{AG}$$

即 $$BX_1 + CY_1 = BX_2 + CY_2$$
即 $$BX_1 - BX_2 = CY_2 - CY_1$$
亦即 $$X_1X_2 = Y_1Y_2$$

而 $X_1X_2 /\!/ Y_1Y_2$,从而易判断 $\triangle GX_1X_2 \cong \triangle GY_1Y_2$,所以 $GX_1 = GY_1$,推知 $BM = MC$,即 AM 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线,亦即 GM 为梯形 BCY_1X_1 的中位线,此时

$$BX_1 + CY_1 = 2GM$$

但 $BX_1 + CY_1 = AG$,故 $AG = 2GM$,由此即知点 G 为 $\triangle ABC$ 之重心,即满足 $\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ} = 3$ 的直线过其重心.

下面举例说明三角形重心性质的应用.

例 1.12 如图 1.71 中,G 为重心,P 为三角形内一点,直线 PG 交直线 BC,CA,AB 于 A',B',C'.求证:$\frac{A'P}{A'G} + \frac{B'P}{B'G} + \frac{C'P}{C'G} = 3$.

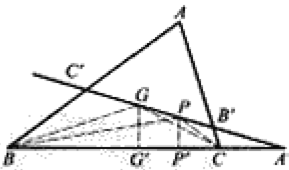


图 1.71

证明 联结 BG,GC,PB,PC,分别过 G,P 作 $GG' \perp BC$,垂足为 G',作 $PP' \perp BC$,垂足为 P',则

$$PP' /\!/ GG', \frac{PP'}{GG'} = \frac{A'P}{A'G}$$

又 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle GBC}} = \frac{PP'}{GG'}$,有 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle GBC}} = \frac{A'P}{A'G}$,同理

$$\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle GCA}} = \frac{B'P}{B'G}, \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle GAB}} = \frac{C'P}{C'G}$$

因为 G 为重心,有

$$S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GBC} = S_{\triangle GCA} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$$

故 $$\frac{A'P}{A'G} + \frac{B'P}{B'G} + \frac{C'P}{C'G} = \frac{3S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{3S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{3S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}} = 3$$

例 1.13 (1979 年安徽省数学竞赛试题)如图 1.72,过 $\triangle ABC$ 的重心 G 任作一条直线把这个三角形分成两部分,试证:这两部分面积之差不大于整个三角形面积的 $\frac{1}{9}$.

证明 把三角形的每条边三等分,过每一分点作平行于其他两边的直线,这些直线把 $\triangle ABC$ 分成 9 个面积相等的小三角形,内部那个交点正好是这个三

角形的重心 G,过 G 的任一直线把三角形分成两部分,观察这两部分面积之差,显然不超过 $\triangle BEF$ 的面积,即 $\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{9}$.

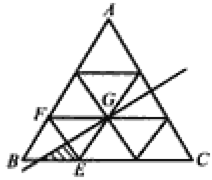


图 1.72

例 1.14 (1982 年天津市初中数学竞赛试题)如图 1.73,已知 $\triangle ABC$ 中,E,F 为 BC 的三等分点,M 为 AC 中点,BM 与 AE,AF 分别相交于 G,H,求 $BG:GH:HM$.

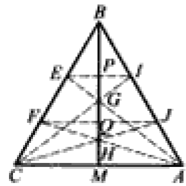


图 1.73

解 联结 CG 并延长交 BA 于 I,联结 EI 交 BM 于 P,联结 CH 并延长交 BA 于 J,联结 FJ 交 BM 于 Q,设 $BM=a$.

因为 BM 为 $\triangle ABC$ 的中线,所以 $EI\parallel FJ\parallel AC$,又 $BE=EF=FC$,所以

$$\frac{BP}{BM}=\frac{EI}{CA}=\frac{PG}{MC}=\frac{1}{3}$$

所以 $$BP=\frac{a}{3},PM=\frac{2a}{3},PG=\frac{a}{6}$$

所以 $BG=\frac{a}{2}$,同理可得 $HM=\frac{a}{5}$,所以

$$GH=a-\frac{a}{2}-\frac{a}{5}=\frac{3a}{10}$$

所以 $$BG:GH:HM=\frac{a}{2}:\frac{3a}{10}:\frac{a}{5}=5:3:2$$

例 1.15 试证:以锐角三角形各边为直径作圆,从相对顶点作切线,得到的六个切点共圆.

证明 如图 1.74,设 $\triangle ABC$ 的三边分别是 a,b,c,圆 O 是以 $BC=a$ 为直径的圆,AT 切圆 O 于一点.联结 AO,在 AO 上取点 G 使 $AG=2GO$,则 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,联结 OT,GT,由

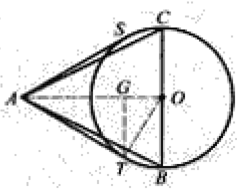


图 1.74

$$AO=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

$$TG^2=OT^2+OG^2-2OT\cdot OG\cos\angle TOA$$

及 $$\cos\angle TOA=\frac{OT}{OA},OT=\frac{1}{2}a,OG=\frac{1}{3}a$$

有 $TG^2=\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)$ 为定值.

同理，其他五个切点如 T 等到重心 G 的距离平方均为 $\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)$，由此即证.

例 1.16 如图 1.75，设圆 O 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，BC，CA，AB 上的切点各是 D，E，F，射线 DO 交 EF 于 A'，同样可得 B'，C'，试证：直线 AA'，BB'，CC' 共点.

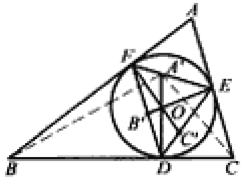


图 1.75

证明 联结 $A'B$，$A'C$ 易知 B，D，O，F 及 C，D，O，E 分别共圆，得

$$\angle A'OF=\angle B,\angle A'OE=\angle C$$

由

$$\frac{A'F}{\sin\angle A'OF}=\frac{OA'}{\sin\angle OFA'}=\frac{OA'}{\sin\angle OEA'}=\frac{A'E}{\sin\angle A'OE}$$

有

$$\frac{A'F}{A'E}=\frac{\sin\angle A'OF}{\sin\angle A'OE}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}$$

从而 $AB\cdot A'F=AC\cdot A'E$，又 $\angle AFE=\angle AEF$，故有

$$S_{\triangle ABA'}=\frac{1}{2}\sin\angle AFE\cdot AB\cdot A'F=\frac{1}{2}\sin\angle AEF\cdot AC\cdot A'E=S_{\triangle ACA'}$$

由此式可知直线 AA' 必平分 BC 边，即 AA' 必过 $\triangle ABC$ 的重心，同样可证 BB'，CC' 也都过 $\triangle ABC$ 的重心.

故由重心的唯一性，AA'，BB'，CC' 三直线共点于 $\triangle ABC$ 的重心.

例 1.17 （《中学数学》1993 年第 3 期第 14 页例 6）如图 1.76，设 O，G 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和重心，点 M 满足 $\frac{\pi}{2}<\angle OMG<\pi$，$A_1$，$B_1$，$C_1$ 依次是直线 AM，BM，CM 与 $\triangle ABC$ 外接圆的交点，试证：

$$AM+BM+CM\leqslant A_1M+B_1M+C_1M$$

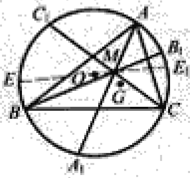


图 1.76

证明 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，过 O，M 的直线交圆 O 于 E，E_1，则

$$MA\cdot MA_1=MB\cdot MB_1=MC\cdot MC_1=ME\cdot ME_1=R^2-OM^2$$

记 $MA\cdot MA_1=k$，则

$A_1M+B_1M+C_1M-(AM+BM+CM)=$

$\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)k-(AM+BM+CM)=$

$\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)\left[k-\frac{1}{3}(AM^2+BM^2+CM^2)\right]+$

$$\frac{1}{3}(AM^2+BM^2+CM^2)\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)-(AM+BM+CM)=W_1+W_2$$

注意到莱布尼兹公式,取 P 为 M,有

$$3MG^2=AM^2+BM^2+CM^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

又取 P 为 O,则有

$$OG^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

再利用 $k=R^2-OM^2$,从而有

$$\begin{aligned}W_1=&\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)\left[k-\frac{1}{3}(AM^2+BM^2+CM^2)\right]=\\&\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)\left\{R^2-OM^2-\frac{1}{3}\left[3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\right]\right\}\\&\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)\left[R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)-OM^2-MG^2\right]=\\&\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)(OG^2-OM^2-MG^2)=\\&\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)(-2OM\cdot MG)\cdot\cos\angle OMG\geqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2=&\frac{1}{3}(AM^2+BM^2+CM^2)\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}+\frac{1}{CM}\right)-(AM+BM+CM)=\\&\frac{1}{3}\left[(AM+BM)\left(\frac{AM}{BM}+\frac{BM}{AM}-2\right)+\frac{(CM+AM)CM}{AM}+\frac{AM}{CM}-2\right]\geqslant\\&\frac{1}{3}[(AM+BM)(2-2)+(BM+CM)(2-2)+\\&(CM+AM)(2-2)]\geqslant 0\end{aligned}$$

故
$$AM+BM+CM\leqslant A_1M+B_1M+C_1M$$

例 1.18 如图 1.77,设 $\triangle ABC$ 的重心为 G, AG, BG, CG 分别交对边于 D, E, F,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A', B', C',求证:$\frac{A'D}{DA}+\frac{B'E}{EB}+\frac{C'F}{FC}\geqslant 1$.

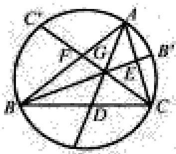


图 1.77

证明 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$,这三边上的中线分别记为 m_a, m_b, m_c 应用相交弦定理,有

$$\frac{A'D}{DA}=\frac{A'D\cdot DA}{DA^2}=\frac{BD\cdot DC}{DA^2}=\frac{a^2}{4m_c^2}$$

则所证不等式等价于

$$\frac{a^2}{m_a^2}+\frac{b^2}{m_b^2}+\frac{c^2}{m_c^2}\geqslant 4$$

应用三角形中线公式 $m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$ 等三式可求出 a^2,b^2,c^2，即 $a^2=\frac{4}{9}(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2)$ 等三式，将其代入上式左边，即证得结论成立.

在本题的证明过程中，先利用中线长计算公式，将 a^2,b^2,c^2 分别用 m_a^2，m_b^2,m_c^2 表示出来，再利用均值不等式证得结论，这种解题技巧希望读者掌握好.

练习 3

1.（1978 年辽宁省数学竞赛试题）如图 1.78，已知 AM 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线，任作一直线交 AB,AC,AM 于 P,Q,N，求证：$\frac{AB}{AP},\frac{AM}{AN},\frac{AC}{AQ}$ 成等差数列.

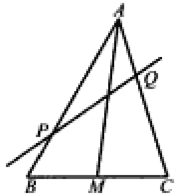


图 1.78

2.（1998 年第十五届全国初中数学联赛试题）如图 1.79，已知 P 为 $\square ABCD$ 内一点，O 为 AC 与 BD 的交点. M，N 分别为 PB，PC 的中点，Q 为 AN 与 DM 的交点.

求证：(1) P,Q,O 三点在一条直线上. (2) $PQ=2OQ$.

3.（第 26 届莫斯科数学奥林匹克试题）如图 1.80，AD,BE,CF 是 $\triangle ABC$ 的三条中线，P 是任意一点. 证明：在 $\triangle PAD,\triangle PBE,\triangle PCF$ 中，其中一个面积等于另外两个面积的和.

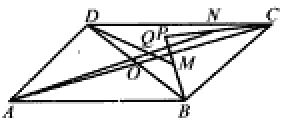


图 1.79

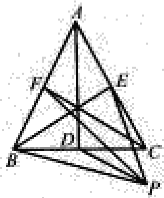


图 1.80

第 4 节　三角形内心的概念和性质

我们知道，在角的平分线上的任何点，到角的两边的距离都相等. 如图1.81 中，P_1,P_2 是在 $\angle ABC$ 的平分线 BS 上的点，P_1Q_1,P_2Q_2 是 P_1,P_2 到 BC 的距离，P_1R_1,P_2R_2 是 P_1,P_2 到 BA 的距离，则 $P_1Q_1=P_1R_1,P_2Q_2=P_2R_2$.

每个三角形都有三个内角，我们来做三角形的内角平分线，如图 1.82 中，AD 平分 $\angle BAC$，BE 平分 $\angle ABC$，AD 与 BE 交于一点 I，则点 I 到 AB，AC 的距离相等，即 $IS = IR$，到 AB，BC 的距离相等，即 $IS = IQ$，从而 $IQ = IR$. 我们又知道，到角的两边距离相等的点，在角的平分线上，因此，点 I 也在 $\angle ACB$ 的平分线上 CF 上. 由此，我们得到：

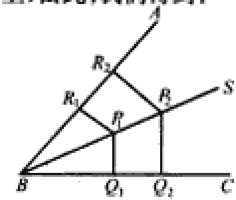


图 1.81

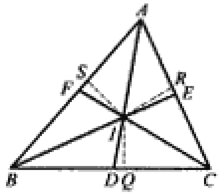


图 1.82

三角形内心定理　　三角形的三条内角平分线相交于一点，这个交点到三角形三边的距离相等.

我们把三角形三内角的交点，叫做三角形的内心. 三角形的内心通常用大写英文字母"I". 很明显，任何三角形的三条内角平分线都在三角形内. 因此，三角形的内心位于三角形内. 在图 1.82 中，$\triangle ABC$ 的三条内角平分线 AD，BE，CF 相交于一点 I，且 $IQ = IR = IS$，点"I"叫做三角形的内心.

在证明三角形内心定理的过程中，其思路与方法是证明三条直线中，其中两条直线的交点在第三条直线上，这也是证明三线共点的一种常用方法.

根据三角形内心定理，联想到三角形的外心、垂心和重心，不难知道：

(1) 三角形的外心、垂心、重心和内心，一般不在一条直线上，更不会重合，只有当 $\triangle ABC$ 为等腰（非等边，如 $AB = AC \neq BC$）时，其外心、垂心、重心和内心均在 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的中线（此时中线、高及顶角的平分线三线合一）上，当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，外心、垂心、重心和内心重合为正三角形的中心. 反过来，这"四心"中任意两心重合，则这个三角形为正三角形.

(2) 从三角形的一个顶点所作出的这个角的平分线和对边上的高、中线一般并不重合. 如图 1.83 中，$\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 AD，中线 AM 和 $\angle A$ 的平分线 AN 就并不重合，若 AB 与 AC 不相等，这时，AN 必定位 AM，AD 于之间.

(3) 三角形的两条内角平分线的交点，就是三角形的内心，三角形的内心在三角形内.

(4) 如图 1.84 中，$\triangle ABC$ 的内心 I 到三边的距离相等，即为 $IP = IQ = IR$，因此，以 I 为圆心，IP 为半径作圆，必与 $\triangle ABC$ 的三边相切于点 P，Q，R.

各边都与同一个圆相切的三角形,叫做圆的外切三角形,这个圆叫做三角形的内切圆.如图1.84中,$\triangle ABC$ 的各边都与圆 I 相切,这个圆 I 就是 $\triangle ABC$ 的内切圆.由此可知:所谓"三角形的内心"就是三角形的内切圆的圆心.

由于三角形的两条内角平分线的交点是唯一的,所以,每个三角形有且只有一个内心,可见,每个三角形有且只有一个内切圆.

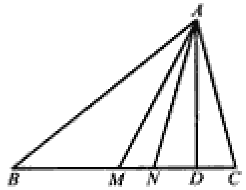


图1.83

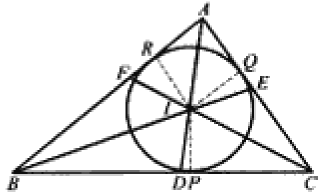


图1.84

(5) 如图1.85中,$\triangle ABC$ 的内切圆 I 在各边上的切点 P,Q,R,一般不是各内角平分线与边的交点 D,E,F.但是,联结 AP,BQ,CR,这样的三条直线也相交于一点 K.但这个交点并不是三角形的内心 I.

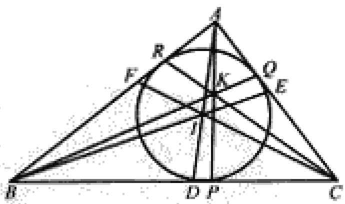


图1.85

(6) 若 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,直线 AI(即为 $\angle A$ 的平分线)与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 Q,则点 Q 必为弧 BC 的中点(是因为 BC 的中垂线,必经过点 Q),并且 $QI=QC=QB$.

对于三角形的内心除了具备以上基本性质外,还具备一些性质.在介绍这些性质之前,先介绍:

三角形内角平分线性质定理 若 AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线,则 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

事实上,如图1.86,过点 C 作 $CE /\!/ DA$ 交 BA 的延长线于点 E,则利用已知条件,有

$$\angle E=\angle BAD=\angle DAC=\angle ACE$$

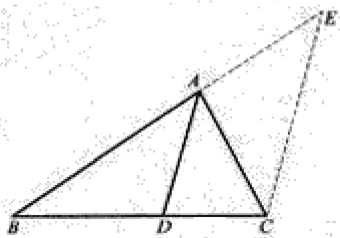


图1.86

所以 $\angle E=\angle ACE$,所以 $AC=AE$,且 $\triangle ABD \backsim \triangle EBC$,所以

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AE}=\frac{DB}{DC}$$

即
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

三角形外角平分线性质定理　若 AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的外角平分线，则 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

事实上，如图1.87，过点 D 作 $DE\parallel CA$ 交 BA 的延长线于点 E，则利用已知条件，有

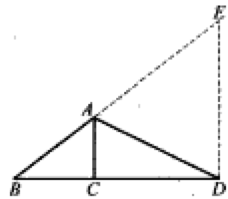


图 1.87

$$\angle CAD=\angle ADE=\angle DAC$$

即
$$\angle ADE=\angle DAE$$

所以
$$AE=DE$$

且
$$\triangle BAC\backsim\triangle BED$$

所以
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{ED}=\frac{BE}{AE}=\frac{DB}{DC}$$

即
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

下面再来介绍三角形内心的性质.

定理1　若 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，则 I 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等，反之亦然.

定理2　若 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，则

$$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A,\angle CIA=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B$$

$$\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$$

事实上，在 $\triangle BIC$ 中

$$\angle BIC=180^\circ-(\angle IBC+\angle ICB)=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=$$

$$180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$$

同理
$$\angle CIA=90^\circ+\frac{1}{2}\angle B,\angle AIB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$$

定理3　若 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 K，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D，则

$$\frac{AI}{KI}=\frac{AD}{DI}=\frac{DI}{DK}=\frac{b+c}{a}$$

证明　如图1.88，由三角形内角平分线性质定理，得

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BK}{KC}=\frac{c}{b}$$

所以 $$\frac{b+c}{b}=\frac{BK+KC}{KC}=\frac{a}{KC}$$

所以 $$KC=\frac{ab}{b+c}$$

从而 $$BK=a-KC=\frac{ac}{b+c}$$

所以 $$\frac{AI}{KI}=\frac{AB}{BK}=\frac{b+c}{a}$$

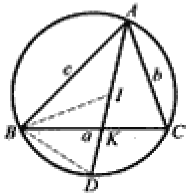


图 1.88

由 $DI=BD$ 及 $\triangle BDA\backsim\triangle KCA$ 得

$$\frac{AD}{DI}=\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{KC}=\frac{b+c}{a}$$

由 $DI=BD$ 及 $\triangle BDK\backsim\triangle ACK$ 得

$$\frac{DI}{DK}=\frac{DB}{DK}=\frac{AC}{KC}=\frac{b+c}{a}$$

综上可知结论成立.

定理 4 三角形内角平分线与其外接圆交点到另两顶点的距离与到内心的距离相等;反之,若 I 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分线 AD(D 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上)上的点,且 $DI=DB$,则 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

证明 如图 1.89,在 $\triangle BDI$ 中

$$\angle BID=\angle BAI+\angle ABI=\angle CAI+\angle IBC=\angle DBC+\angle IBC=\angle DBI$$

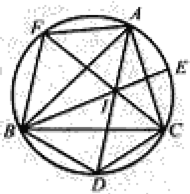


图 1.89

所以 $$BD=DI$$

同理 $$DC=DI$$

所以 $$BD=DI=DC$$

反之,若 $BD=DI$,$\angle BAI=\angle CAI$,则

$$\angle DBI=\angle DIB$$

所以 $$\angle DBC+\angle IBC=\angle BAI+\angle ABI$$

又 $$\angle DBC=\angle DAC=\angle DAB$$

所以 $\angle ABI=\angle CBI$,即 BE 平分 $\angle ABC$,所以 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

例 1.19 (第 17 届美国数学奥林匹克竞赛试题)如图 1.90,设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,且 A',B',C' 分别为 $\triangle IBC$,$\triangle ICA$,$\triangle IAB$ 的外心.

求证:$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有相同的外心.

证明 如图 1.90,延长 AI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 A'',则由三角形内心定理 4 知

$$A''B=A''C=A''I$$

所以由圆的定义知：A'' 为 $\triangle IBC$ 外心，又 $\triangle IBC$ 的外心为 A'，又 $\triangle IBC$ 的外心是唯一的.

所以 A' 与 A'' 重合.

从而点 A' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，同理可知：B'，C' 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，故 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有相同的外心.

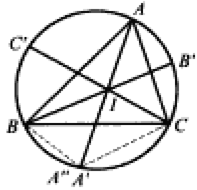


图 1.90

例 1.20 （第 47 届 IMO 试题）如图 1.91，设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，P 为 $\triangle ABC$ 内部一点，满足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

求证：$AP \geqslant AI$，并说明等号成立的充分必要条件是 $P = I$.

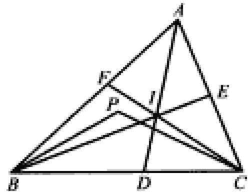


图 1.91

证明 如图 1.91，设 $\angle A = \alpha$，$\angle B = \beta$，$\angle C = \gamma$，则

$$\angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = \beta + \gamma$$

由已知得 $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$

所以 $$\angle BPC = \angle BIC$$

由于点 P，I 位于边 BC 的同侧，故 B，C，I，P 四点共圆，及点 P 在 $\triangle IBC$ 的外接圆 M 上，设 $\triangle ABC$ 的外接圆为圆 O，则圆 M 的圆心是圆 O 的 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，即 $\angle A$ 的平分线与圆 O 的交点，又在 $\triangle APM$ 中，有

$$AP + PM \geqslant AM = AI + IM = AI + PM$$

故 $AP \geqslant AI$，等号成立的充分必要条件是点 P 位于线段 AI 上，且 $P = I$.

例 1.21 如图 1.92，圆 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，圆 O' 与圆 O 内切于 T，并与 AB，AC 分别切于 P，Q. 求证：线段 PQ 的中点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

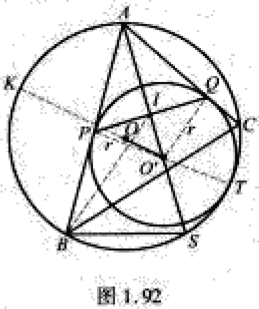


图 1.92

证明 如图 1.92，设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，O' 为与外接圆 O 内切于 T 且与 AB，AC 相切于 P，Q 的圆的圆心，I 为 PQ 的中点，联结 AO'，交圆 O 于 S，则 AS 平分 $\angle A$，且经过 PQ 的中点 I. 设外接圆 O 的半径为 R，据正弦定理，得

$$BS = 2R\sin\frac{A}{2}$$

设 $O'T = O'Q = O'P = r$；并且过 O，O' 作出圆 O 的直径 TK. 由

$$KO' \cdot O'T = (2R - r)r = AO' \cdot O'S$$

及
$$O'P = r = AO'\sin\frac{A}{2}$$

得到
$$O'S = \frac{(2R-r)r}{AO'} = (2R-r)\sin\frac{A}{2}$$

又
$$IO' = r\sin\frac{A}{2}$$

故
$$IS = IO' + O'S = 2R\sin\frac{A}{2}$$

因此，有
$$BS = IS$$

由三角形内心性质定理 4 知：这点 I 当为 $\triangle ABC$ 的内心.

说明 (1) 当 $AB = AC$ 时，此题为第 20 届 IMO 试题. 因此，原题条件"$AB = AC$"是多余的.

(2) 利用本题的结论还可以简捷地解答如下试题.

例 1.22 (第 20 届伊朗数学奥林匹克试题) 如图 1.93，设与 $\triangle ABC$ 的外接圆内切并与边 AB，AC 相切的圆为 C_a，记 r_a 为圆 C_a 的半径，r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，类似地定义 r_b，r_c.

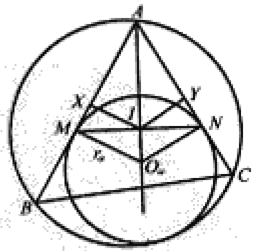


图 1.93

求证：$r_a + r_b + r_c \geqslant 4r$.

证明 设 M，N 为点 O_a 在 AB，AC 上的投影，这里 O_a 为圆 C_a 的圆心. 则由上题的结论知，$\triangle ABC$ 的内心 I 为 MN 的中点. 又设 X，Y 为 I 在 AB，AC 上的投影，则

$$\frac{r_a}{r} = \frac{O_aM}{IX} = \frac{AM}{AX} = \frac{\dfrac{AI}{\cos\frac{A}{2}}}{AI\cos\frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

同理
$$\frac{r_b}{r} = \frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}},\ \frac{r_c}{r} = \frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

所以 $\dfrac{r_a}{r} + \dfrac{r_b}{r} + \dfrac{r_c}{r} = 3 + \tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} =$

$$4 + \frac{1}{2}\left[\left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2}\right)^2 + \left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)^2\right] \geqslant 4$$

这里用到 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$ 后，再配方.

利用三角形内心性质定理 4 还可以使《数学通讯》中 1998 年 11 月的问题

1163 的解答过程变得非常简便. 原题是:

如图 1.94, 已知圆 O_1 与圆 O_2 内切于点 P, 圆 O_1 上任意一点 A, 弦 AB, AC 切圆 O_2 于 E, F, 弦 AT 过 O_2 且交 EF 于 H, 交 BC 于 D. 求证: $\frac{AH}{AT}=\frac{HD}{HT}$.

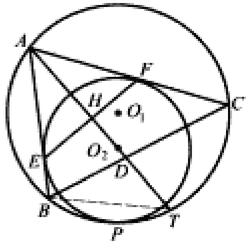


图 1.94

分析 运用原证题的思路解答如下:

联结 TB, 因为 AB, AC 是圆 O_2 的切线, 又 AT 过点 O_2, 所以

$$\angle BAT=\angle CAT=\angle CBT$$

所以 $$\triangle BTD \backsim \triangle ATB$$

所以 $$TB^2=TD\cdot TA$$

又 $$TD=TH-HD, TA=TH+AH$$

所以 $TB^2=(TH-HD)(TH+AH)=$

$$TH^2-HD\cdot TH+TH\cdot AH-HD\cdot AH=$$

$$TH^2+TH\cdot AH-(TH+AH)HD=TH^2+TH\cdot AH-AT\cdot HD$$

由例 1.21 知 H 为 $\triangle ABC$ 的内心, 又由三角形内心定理 4 知 $TB=TH$, 代人上式整理即得结论.

例 1.23 在 $\triangle ABC$ 外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上任取一点 P, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$ 的中点分别为点 D, E, PD, PE 分别与 AB, AC 交于点 F, G. 证明: FG 过 $\triangle ABC$ 的内心.

(当 P 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点时, 即为第 5 届全俄数学奥林匹克竞赛试题.)

证明 如图 1.95, 联结 PA, PB, PC, 由角平分线定理, 得 $\frac{PA}{PB}=\frac{AF}{FB}$, $\frac{PC}{PA}=\frac{GC}{AG}$.

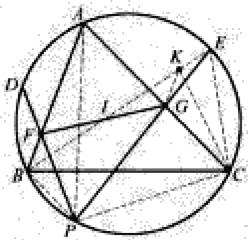


图 1.95

设 BE 与 FG 交于点 I, 则 $\frac{FI}{IG}=\frac{FB}{GK}$. 过点 G 作与 AB 平行的直线与 BE 交于点 K, 则

$$\angle BKG=\angle ABE=\angle ACE$$

于是有 C, E, K, G 四点共圆. 因为

$$\angle GKC=\angle GEC=\angle PEC=\angle PBC$$

$$\angle GCK=\angle GEK=\angle PEB=\angle PCB$$

所以 $\triangle GKC \backsim \triangle PBC$, 因此 $\frac{PB}{PC}=\frac{GK}{GC}$.

将上述 4 个比例式相乘, 可得 $\frac{FI}{IG}=\frac{AF}{AG}$, 即 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

例 1.24 （2007年国家集训队训练题）凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，与边 BC 相交的一个圆与圆 O 内切，且分别与 BD，AC 相切于点 P，Q. 求证：$\triangle ABC$ 的内心与 $\triangle DBC$ 的内心皆在直线 PQ 上.

证明 如图1.96，设 AC，BD 交于点 H，由前面的分析，结合梅涅劳斯定理的逆定理，可知只须证明

$$\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DP}{PH}\cdot\frac{HQ}{QC}=1$$

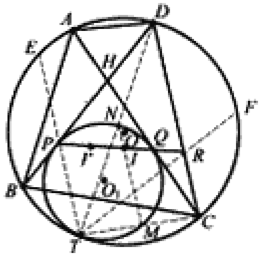


图 1.96

设 TC，TD 与圆 O_1 分别交于点 M，N，因为 T 是圆 O_1 与圆 O 的位似中心，则 $MN\parallel CD$. 由切割线定理，可得

$$\frac{DP}{QC}=\frac{\sqrt{DN\cdot DT}}{\sqrt{CM\cdot CT}}=\frac{\sqrt{DT\cdot DT}}{\sqrt{CT\cdot CT}}=\frac{DT}{CT}$$

由角平分线定理，得 $\frac{CR}{RD}=\frac{CT}{DT}$. 又因为 $PH=HQ$，所以 $\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DP}{PH}\cdot\frac{HQ}{QC}=1$.

当然，也可以反过来证明. 延长 PQ 与 CD 交于点 R. 只要证明 TR 平分 $\angle CTD$，即只要证明 $\frac{CR}{RD}=\frac{CT}{DT}$ 即可. 利用前面得到的结论及梅涅劳斯定理，即可得证.

定理 5 截三角形的直线分三角形的周长与面积等比的充要条件是：直线过三角形的内心.

证明 如图1.97，设直线 EF 截 $\triangle ABC$ 与 AB，AC 分别交于点 E，F.

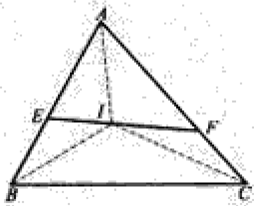


图 1.97

(1) 若 EF 过 $\triangle ABC$ 的内心 I，联结 IB，IC，设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，则

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}(AE+AF)r,$$

$$S_{四边形EBCF}=\frac{1}{2}(EB+BC+CF)r$$

所以

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{四边形EBCF}}=\frac{AE+AF}{EB+BC+CF} \qquad ①$$

即 EF 分 $\triangle ABC$ 的面积与周长为等比.

(2) 若直线 EF 分 $\triangle ABC$ 的面积与周长为等比，即式①成立. 作 $\angle A$ 的平

分线与 EF 交于点 I，设点 I 到 AB，AC 的距离分别为 r_1，r_2，则

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}(AE+AF)r_1$$

$$S_{\text{四边形}EBCF}=\frac{1}{2}(EB+CF)r_1+\frac{1}{2}BC\cdot r_2$$

代入式①，得

$$(EB+BC+CF)r_1=(EB+CF)r_1+BC\cdot r_2$$

所以

$$r_1=r_2$$

这说明点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，即 EF 过 $\triangle ABC$ 的内心.

定理 6 （第 22 届 IMO 试题）设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，$\triangle ABC$ 内一点 P 在 BC，CA，AB 上的射影分别为 D，E，F，当 P 和 I 重合时，和式 $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ 的值最小.

证明 设 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$PD=x$，$PE=y$，$PF=z$，则 $ax+by+cz=2S_{\triangle ABC}$ 为定值.

由柯西不等式，有

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)\geqslant(a+b+c)^2$$

故

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2S_{\triangle ABC}}$$

为定值，其中等号当且仅当

$$\frac{a}{x}:ax=\frac{b}{y}:by=\frac{c}{z}:cz$$

即 $x=y=z$ 时成立，此时 P 与 I 重合.

定理 7 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，则

$$IA/\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=IB/\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}=IC/\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=4R$$

证明 如图 1.98，设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，根据三角形面积公式及正弦定理，得

$$\frac{1}{2}r(a+b+c)=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

由此可得

$$r=4R\sin A\sin B\sin C$$

过 I 作 $IE\perp AB$ 于 E，则

$$IA=IE/\sin\frac{A}{2}=r/\sin\frac{A}{2}=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

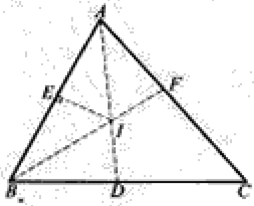


图 1.98

同理
$$IB=4R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}, IC=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

故结论成立.

定理 8 过 $\triangle ABC$ 内心 I 任作一直线,分别交 AB,AC 于 P 及 Q 两点,则
$$\frac{AB}{AP}\cdot AC+\frac{AC}{AQ}\cdot AB=AB+AC+BC$$
或
$$\frac{AB}{AP}\sin B+\frac{AC}{AQ}\sin C=\sin A+\sin B+\sin C$$

证明 如图 1.99,先看一般情形.设 M 为 BC 边上任意一点,直线 PQ 分别交 AB,AM,AC,于 P,Q,N,则

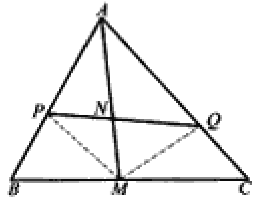


图 1.99

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AN+NM}{AN}=\frac{S_{\triangle APQ}+S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle APQ}}=$$
$$\frac{S_{\triangle APM}+S_{\triangle AQM}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}S_{\triangle ABC}}=$$
$$\frac{\frac{AP}{AB}\cdot S_{\triangle ABM}+\frac{AQ}{AC}\cdot S_{\triangle ACM}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}S_{\triangle ABC}}=\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BM}{BC}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CM}{BC} \quad ①$$

当 N 为 $\triangle ABC$ 的内心时,由三角形内角平分线性质及合比、等比定理及定理 5,有
$$\frac{BM}{BC}=\frac{AB}{AB+AC},\frac{MC}{BC}=\frac{AC}{AB+AC},\frac{AM}{AN}=\frac{AB+AC+BC}{AB+AC}$$
将上述三式代入式 ① 即得结论.

定理 9 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,AI,BI,CI 的延长线分别交三角形的三边 BC,CA,AB 于 D,E,F,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1,B_1,C_1,记 $AD=t_a,BE=t_b,CF=t_c,AA_1=l_a,BB_1=l_b,CC_1=l_c$,用 p,R,r 分别表示 $\triangle ABC$ 的半周长、外接圆、内切圆半径,则

(1) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{2}R$,即 $R\geqslant 2r$.

(2) $AI=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},BI=4R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2},CI=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$.

(3) $t_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$;

$t_b=\frac{2ca}{c+a}\cos\frac{B}{2}=\frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$;

$$t_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

(4) $l_a = 2R\cos\frac{C-B}{2}, l_b = 2R\cos\frac{C-A}{2}, l_c = 2R\cos\frac{A-B}{2}$.

证明 如图 1.100,先证明 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$,事实上

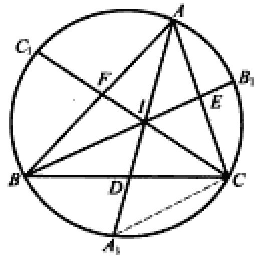


图 1.100

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$$
$$-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} =$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant$$
$$\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

等号成立 $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \\ \cos\frac{A-B}{2} = 1\end{cases} \Leftrightarrow$ $\triangle ABC$ 为正三角形时.

因此,利用定理 7 知(1)、(2) 成立.

(3) 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$ 得

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bt_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}ct_a\sin\frac{A}{2}$$

即
$$bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} = a(b+c)\sin\frac{A}{2}$$

所以
$$t_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

所以
$$t_a^2 = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cdot\cos^2\frac{A}{2} = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cdot\frac{1+\cos A}{2} =$$
$$\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cdot\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} =$$
$$\frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(-a+b+c) = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$$

所以
$$t_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

同理可证其他两式.

(4) 在 $\triangle AA_1C$ 中,由正弦定理得

$$\frac{AA_1}{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}=\frac{AC}{\sin A_1}=\frac{b}{\sin\angle ABC}$$

所以
$$l_a=\frac{b\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}{\sin\angle ABC}=2R\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}-\frac{B}{2}\right)=$$
$$2R\sin\left[90^\circ+\left(\frac{C}{2}-\frac{B}{2}\right)\right]=2R\cos\frac{C-B}{2}$$

同理可证
$$l_b=2R\cos\frac{C-A}{2},\ l_c=2R\cos\frac{A-B}{2}$$

定理 10 设 I 为锐角 $\triangle ABC$ 的内心,AI,BI,CI 的延长线分别交三角形的三边 BC,CA,AB 于 D,E,F,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1,B_1,C_1,则

(1) $\frac{AI^2}{bc}+\frac{BI^2}{ca}+\frac{CI^2}{ab}=1$.

(2) $\frac{AI}{AD}+\frac{BI}{BE}+\frac{CI}{CF}=2$.

(3) $\frac{DA_1}{DA}+\frac{EB_1}{EB}+\frac{FC_1}{FC}=\frac{R}{r}-1$.

(4) $\frac{DA_1}{DI}+\frac{EB_1}{EI}+\frac{FC_1}{FI}=2\cdot\frac{R}{r}-1$.

(5) $\frac{IA_1}{IA}+\frac{IB_1}{IB}+\frac{IC_1}{IC}=\frac{1}{2}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}-1$.

(6) $AA_1\cos\frac{A}{2}+BB_1\cos\frac{B}{2}+CC_1\cos\frac{C}{2}=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

证明 如图 1.101.

(1) 由定理 9 及正弦定理,得

$$\frac{AI^2}{bc}=\frac{16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}{4R^2\sin B\sin C}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

同理 $\frac{BI^2}{ca}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2},\frac{CI^2}{ab}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

又 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

从而知原式成立.

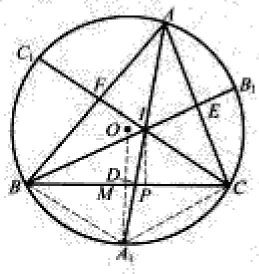


图 1.101

(2) 由定理 3 知:$\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}$,所以

$$\frac{AI}{AD}=\frac{AI}{AI+ID}=\frac{b+c}{a+b+c}$$

同理 $$\frac{BI}{BE}=\frac{c+a}{a+b+c},\frac{CI}{CF}=\frac{a+b}{a+b+c}$$

以上三式相加便知式(2)成立.顺便得到

$$\frac{ID}{AA_1}+\frac{IE}{BB_1}+\frac{IF}{CC_1}=1.$$

(3) 设 $\triangle ABC$ 的外心 O 到三边 BC,CA,AB 的距离分别为 d_a,d_b,d_c,联结 OA_1,OB_1,OC_1,则 $OA_1\perp BC$ 于点 M,且 $OM=d_a,MA_1=R-d_a$.所以

$$\frac{DA_1}{DA}=\frac{S_{\triangle BA_1C}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{a(R-d_a)}{2S_{\triangle ABC}}$$

同理 $$\frac{EB_1}{EB}=\frac{b(R-d_b)}{2S_{\triangle ABC}},\frac{FC_1}{FC}=\frac{c(R-d_c)}{2S_{\triangle ABC}}$$

所以 $$\frac{DA_1}{DA}+\frac{EB_1}{EB}+\frac{FC_1}{FC}=\frac{1}{2S_{\triangle ABC}}[R(a+b+c)-(ad_a+bd_b+cd_c)]=$$

$$\frac{1}{2S_{\triangle ABC}}\left(R\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{r}-2S_{\triangle ABC}\right)=\frac{R}{r}-1$$

顺便可以得到

$$\frac{A_1A}{DA}+\frac{B_1B}{EB}+\frac{C_1C}{FB}=\frac{R}{r}+2$$

(4) 作 $IP\perp BC$ 于点 P,则 $IP=r$,且 $A_1O\parallel IP$,所以

$$\frac{DA_1}{DI}=\frac{A_1M}{IP}=\frac{R-d_a}{r}$$

同理 $$\frac{EB_1}{EI}=\frac{R-d_b}{r},\frac{FC_1}{FI}=\frac{R-d_c}{r}$$

注意到三角形的外心定理知

$$d_a+d_b+d_c=R+r$$

所以 $$\frac{DA_1}{DI}+\frac{EB_1}{EI}+\frac{FC_1}{FI}=\frac{1}{r}[3R-(d_a+d_b+d_c)]=2\cdot\frac{R}{r}-1$$

所以 $$\frac{A_1I}{DI}+\frac{B_1I}{EI}+\frac{C_1I}{FI}=2\cdot\frac{R}{r}+2$$

(5) 由定理 3 知:$\frac{AA_1}{A_1I}=\frac{b+c}{a}$,得

$$\frac{AI+IA_1}{A_1I}=\frac{b+c}{a}$$

所以 $$\frac{IA_1}{IA}=\frac{a}{b+c-a}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C-\sin A}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

同理 $$\frac{IB_1}{IB}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}},\frac{IC_1}{IC}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

所以 $$\frac{IA_1}{IA}+\frac{IB_1}{IB}+\frac{IC_1}{IC}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

但 $$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]=$$
$$1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

所以 $$\frac{IA_1}{IA}+\frac{IB_1}{IB}+\frac{IC_1}{IC}=\frac{1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$
$$\frac{1}{2}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}-1$$

(6) 在四边形 ABA_1C 中,由托氏定理,得
$$AB\cdot A_1C+AC\cdot BA_1=AA_1\cdot BC$$

又 $$BA_1=A_1C=\frac{1}{2}BC\cdot\sec\angle A_1BC=\frac{a}{2}\sec\frac{A}{2}$$

所以 $$(c+b)\cdot\frac{a}{2}\cdot\sec\frac{A}{2}=AA_1\cdot a$$

所以 $$AA_1=\frac{b+c}{2}\cdot\sec\frac{A}{2}$$

即 $$AA_1\cos\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2}$$

同理 $$BB_1\cos\frac{B}{2}=\frac{c+a}{2},CC_1\cos\frac{C}{2}=\frac{a+b}{2}$$

所以 $$AA_1\cos\frac{A}{2}+BB_1\cos\frac{B}{2}+CC_1\cos\frac{C}{2}=$$
$$a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)=$$
$$8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

定理 11 设 I 为锐角 $\triangle ABC$ 的内心,AI,BI,CI 的延长线分别交三角形的

三边 BC,CA,AB 于 D,E,F，交外接圆于 A_1,B_1,C_1，用 s,p,R,r 与 s',p',R',r' 分别表示 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积、半周长、外接圆半径、内切圆半径，则

(1) $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

(2) $\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{8}\csc\dfrac{A}{2}\csc\dfrac{B}{2}\csc\dfrac{C}{2}$.

(3) $P'\geqslant P,r'\geqslant r$.

(4) $IA\cdot IB\cdot IC\leqslant IA_1\cdot IB_1\cdot IC_1$.

证明　如图 1.102.

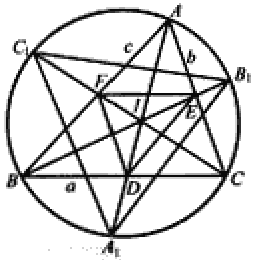


图 1.102

(1) 由三角形内角平分线性质定理得

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AF}{BF}$$

所以
$$\frac{a}{a+b}=\frac{AF}{c}$$

所以
$$AF=\frac{ac}{a+b}$$

同理
$$AE=\frac{bc}{a+c}$$

所以
$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{abc^2}{(a+b)(a+c)}\sin A$$

所以
$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{ac}{(a+b)(a+c)}$$

同理
$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{ab}{(b+a)(b+c)},\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{bc}{(c+a)(c+b)}$$

所以

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left[1-\frac{ab}{(b+a)(b+c)}-\frac{bc}{(c+a)(c+b)}-\frac{ac}{(a+b)(a+c)}\right]=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

由均值不等式可知

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},b+c\geqslant 2\sqrt{bc},c+a\geqslant\sqrt{ca}$$

所以 $S_{\triangle ABC}\geqslant 4S_{\triangle DEF}$（等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时）.

(2) 由已知条件易知

$$\angle A_1=\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2},\angle B_1=\frac{C+A}{2}=90^\circ-\frac{B}{2}$$

$$\angle C_1 = \frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$$

又
$$S_{\triangle ABC} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = 2R^2\sin(90° - \frac{A}{2})\sin(90° - \frac{B}{2})\sin(90° - \frac{C}{2}) =$$
$$2R^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

所以
$$\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin A\sin B\sin C} = \frac{1}{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} =$$
$$\frac{1}{8}\csc\frac{A}{2}\csc\frac{B}{2}\csc\frac{C}{2}$$

又
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$$

所以
$$S_{\triangle A_1B_1C_1} \geqslant S_{\triangle ABC}$$

综合(1)(2) 可得
$$S_{\triangle A_1B_1C_1} \geqslant S_{\triangle ABC} \geqslant 4S_{\triangle DEF}$$
其中等号成立当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(3)
$$\frac{p'}{p} = \frac{\frac{s'}{r'}}{\frac{s}{r}} = \frac{s'r}{sr'} = \frac{Rr}{2rr'} = \frac{R'}{2r'} \geqslant 1$$

即 $p' \geqslant p$,这是用到

$$2S_{\triangle A_1B_1C_1} = 4R^2\sin A_1\sin B_1\sin C_1 = R^2(\sin 2A_1 + \sin 2B_1 + \sin 2C_1) =$$
$$R^2(\sin A + \sin B + \sin C) = Rp = R\cdot\frac{s}{r} \Rightarrow s' = \frac{sR}{2r}$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{4R'\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2}}{\cos A_1\cos B_1\cos C_1}$$

因为
$$\cos A_1\cos B_1 = \frac{1}{2}[\cos(A_1+B_1) + \cos(A_1 - B_1)] \leqslant$$
$$\frac{1}{2}(1 - \cos C_1) = \sin^2\frac{C_1}{2}$$

同理
$$\cos B_1\cos C_1 \leqslant \frac{1}{2}(1 - \cos A_1) = \sin^2\frac{A_1}{2}$$

$$\cos C_1\cos A_1 \leqslant \frac{1}{2}(1-\cos B_1) = \sin^2\frac{B_1}{2}$$

所以
$$\sin\frac{A_1}{2}\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{C_1}{2} \geqslant \cos A_1\cos B_1\cos C_1$$

所以
$$r' \geqslant r$$

(4) 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $B_1C_1=a_1$, $C_1A_1=b_1$, $A_1B_1=c_1$, 又

$$AI = 2R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, BI = 2R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}, CI = 2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$A_1I = 2R\cos\frac{A}{2}, B_1I = 2R\cos\frac{B}{2}, C_1I = 2R\cos\frac{C}{2}$$

所以
$$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{A_1I\cdot B_1I\cdot C_1I} = \frac{abc}{a_1b_1c_1} = \frac{4RS_{\triangle ABC}}{4RS_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}$$

因为
$$S_{\triangle A_1B_1C_1} \geqslant S_{\triangle ABC}$$

故
$$A_1I\cdot B_1I\cdot C_1I \geqslant AI\cdot BI\cdot CI$$

定理 12 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, AI, BI, CI 的延长线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1, B_1, C_1, 联结得 $\triangle A_1B_1C_1$, 其中 BC 分别交 A_1B_1 与 A_1C_1 于点 H, F; CA 分别交 B_1A_1 与 B_1C_1 于点 E, G; AB 分别交 C_1A_1 与 C_1B_1 于点 D, K. 则

(1) DE, FG 和 HK 共点于 $\triangle ABC$ 的内心 I.

(2) $DE\ /\!/\ BC$, $FG\ /\!/\ AB$, $HK\ /\!/\ CA$.

(3) $BDIF$, $CEIH$ 和 $AGIK$ 都是菱形.

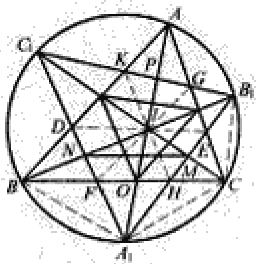


图 1.103

证明 如图 1.103, 由定理 4 知: $A_1B=A_1I$, $C_1B=C_1I$, 所以 A_1C_1 是线段 BI 的中垂线.

又 BI 平分 $\angle ABC$, 所以 BI 是 DF 的中垂线, 所以四边形 $DBFI$ 是菱形.

所以 $DI\ /\!/\ BF$, 即 $DI\ /\!/\ BC$,

同理可证: $DE\ /\!/\ BC$, 故 $DE\ /\!/\ BC$, 且 DE 过 $\triangle ABC$ 的内心 I.

由以上证明可知上述结论均成立.

利用上述结论容易证明如下试题:

(1) (越南数学奥林匹克竞赛试题) 条件与记号同上, 则 $FH=EG=KD \Leftrightarrow \triangle ABC$ 是正三角形.

事实上, 充分性是显然的, 故只证必要性.

因为 $DE\ /\!/\ BC$, $FG\ /\!/\ AB$, $HK\ /\!/\ CA$, 所以 $\angle IDK=\angle B=\angle IFH$, 又

$ID = IF$,所以 $\triangle IDK \cong \triangle IFH$,所以 $IK = IH$,即 I 是 HK 的中点.

同理 I 也是 FG 的中点.

所以 $KG \parallel FH$,所以 $\overset{\frown}{BC_1} = \overset{\frown}{CB_1}$,所以 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$,所以 $AB = AC$,同理可证 $AB = BC$.

故 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(2) 条件与记号同上,则 $DF = HE = GK \Leftrightarrow \triangle ABC$ 是正三角形.

事实上,充分性显然,只证必要性.

因为 $DE \parallel BC$,且 $DF = HE$,所以 $DEHF$ 为等腰梯形,所以 $\angle FDI = \angle HEI$,又 $ID = IF$,$IE = IH$,所以等腰 $\triangle IDF \cong$ 等腰 $\triangle IEH$,所以 $\angle B = \angle DIF = \angle EIH = \angle C$.

同理可证 $\angle A = \angle B$,所以 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(3) 条件与记号同上,则 I 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心.

事实上:因为

$$\angle AA_1C_1 + \angle A_1C_1B_1 = \angle AA_1C_1 + \angle A_1C_1C + \angle CC_1B_1 = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ$$

所以 $AA_1 \perp B_1C_1$,同理 $BB_1 \perp A_1C_1$,$CC_1 \perp A_1B_1$.

故 I 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心.

(4) 条件与记号同上,则

$$A_1F \cdot B_1E \cdot C_1K = A_1H \cdot B_1G \cdot C_1D$$

事实上:因为

$$\angle B_1A_1C_1 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$$

由于 $AA_1 \perp B_1C_1$ 知 $\angle AGC_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$,所以 $\angle B_1A_1C_1 = \angle AGC_1$.

所以 C_1, G, E, A_1 四点共圆,所以

$$B_1E \cdot B_1A_1 = B_1G \cdot B_1C_1$$

同理 $$C_1K \cdot C_1B_1 = C_1D \cdot C_1A_1,\ A_1F \cdot A_1C_1 = A_1H \cdot A_1B_1$$

以上三式相乘,得

$$A_1F \cdot B_1E \cdot C_1K = A_1H \cdot B_1G \cdot C_1D$$

(5) (2002 年安徽省数学竞赛试题) 条件与记号同上,再加上 AA_1 交 BC 于 D,BB_1 交 CA 于 E,CC_1 交 AB 于 F,则

$$AA_1 \cdot ID = BB_1 \cdot IE = CC_1 \cdot IF$$

事实上，如图 1.104，过点 A_1 作圆 O 的直径 A_1G，联结 AG，作 $IP \perp BC$ 于点 P，因为

$$\angle IDP = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA_1} + \overset{\frown}{AC}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1C} + \overset{\frown}{CA}) = \angle AGA_1$$

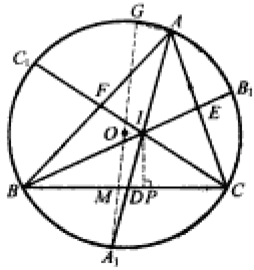


图 1.104

又 $$\angle GAA_1 = \angle IPD = 90^\circ$$

所以 $$Rt\triangle AA_1G \backsim Rt\triangle PID$$

所以 $$\frac{ID}{A_1G} = \frac{IP}{AA_1}$$

即 $$AA_1 \cdot ID = IP \cdot A_1G = 2Rr$$

同理 $$BB_1 \cdot IE = CC_1 \cdot IF = 2Rr$$

所以 $$AA_1 \cdot A_1G = BB_1 \cdot IE = CC_1 \cdot IF$$

(6)（2003年巴尔干地区数学奥林匹克试题）条件与记号同上，再加上记菱形 $BFID$ 与 $CEIH$ 的中心分别为 M，N，$\triangle A_1MN$ 的外心为 O_1，AA_1 交 B_1C_1 于点 P，则 M，O_1，N、P 四点共圆.

事实上，如图 1.103，因为

$$BB_1 \perp A_1C_1, CC_1 \perp A_1B_1$$

所以 A_1，M，I，N 四点共圆，所以

$$\angle A_1NM = \angle A_1IM = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC_1} + \overset{\frown}{CA_1}) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$$

同理 $$\angle A_1MN = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B), \angle MAN = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

又 $$\angle NPC_1 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C), \angle B_1PM = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

从而 $$\angle NO_1M = 2\angle MA_1N = \angle B + \angle C$$

所以 $$\angle NPM = \pi - \angle NPC_1 - \angle B_1PM = \pi - \angle B - \angle C$$

所以 $$\angle MO_1N + \angle MPN = \pi$$

故 M，O_1，N，P 四点共圆.

若设 I 为 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心，圆 I 切 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 于点 D，E，F，我们称 $\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆的切点三角形，或就称为切点三角形 DEF，与此三角形有关的知识非常丰富，下面就来研究这个三角形的一些性质.

定理 13 AD，BE，CF 相交于一点.

证明 如图 105，设 BE，CF 相交于点 K，联结 AK，交 BC 于 D'.（我们来证

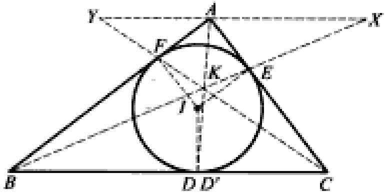


图 1.105

AD' 就是 AD；也就是，要来证 D'，D 相重合.)

因 D, E, F 分别为各边上的切点，故有

$$AE = AF, BF = BD, CD = CE$$

于是要证 D'，D 相重合，就要先来证出

$$BD' = BF, CD' = CE$$

过 A 作 BC 的平行线与 BE，CF 的延长线分别相交于 X，Y.

由 $\triangle AKX \backsim \triangle D'KB$ 及 $\triangle AKY \backsim \triangle D'KC$，得

$$\frac{AX}{D'B} = \frac{AK}{D'K} = \frac{AY}{D'C}$$

即
$$\frac{AX}{AY} = \frac{BD'}{D'C}$$

又由 $\triangle AXE \backsim \triangle CBE$ 及 $\triangle AYF \backsim \triangle BCF$ 得

$$\frac{AX}{CB} = \frac{AE}{CE}, \frac{AY}{BC} = \frac{AF}{BF}$$

因此
$$\frac{AX}{AY} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF}$$

但，已知
$$AE = AF, BF = BD, CD = CE$$

故得
$$\frac{AX}{AY} = \frac{BD}{DC}$$

这样一来，就得到
$$\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}$$

利用合比定理，得
$$\frac{BD'}{BC} = \frac{BD}{BC}$$

于是，有 $BD' = BD$，可见 D' 与 D 必是同一点；

从而可知：直线 AD'（即 AK）与 AD 是同一直线.

这就证明了：AD 经过 BE，CF 的交点 K；也就是，AD，BE，CF 相交于一点 K.

说明　本题所证明的这个交点，通常叫做葛干涅(Gergonne)点.

定理 14　设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$\triangle DEF$ 为切点三角形，内切圆半径为 r，则

(1) $S_{\triangle ABC} = rp$.

(2) $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

(3) $AE = AF = p - a$，$BD = BF = p - b$，$CE = CD = p - c$.

(4) $abcr = p \cdot AI \cdot BI \cdot CI$.

证明　如图 1.106,(1)(2) 显然.

(3) 设 $AE = AF = x, BF = BD = y, CD = CE = z$,则

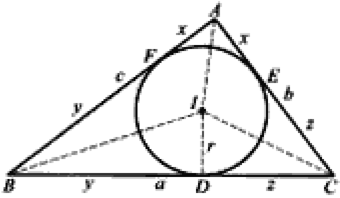


图 1.106

$$\begin{cases} y + z = a & ① \\ z + x = b & ② \\ x + y = c & ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ - ①,得

$$x = \frac{1}{2}(-a + b + c) = p - a$$

① + ② + ③ - ②,得

$$y = \frac{1}{2}(a - b + c) = p - b$$

(1) + (2) + (3) - (3),得

$$z = \frac{1}{2}(a + b - c) = p - c$$

(4) 在 $\triangle ABI$ 中,由正弦定理及性质知

$$\frac{AI}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{c}{\cos\frac{C}{2}} \Rightarrow \frac{AI}{c} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

同理

$$\frac{BI}{a} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \frac{CI}{b} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

将以上三式相乘得

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{abc} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p-a} \cdot \frac{r}{p-b} \cdot \frac{r}{p-c} = \frac{pr^3}{S^2_{\triangle ABC}} = \frac{r}{p}$$

即

$$abcr = p \cdot AI \cdot BI \cdot CI$$

定理 15　$S_{\triangle DEF} = \frac{r}{2R}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle IBC} = \frac{a}{2p}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ICA} = \frac{b}{2p}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle IAB} = \frac{c}{2p}S_{\triangle ABC}$.

证明　如图 1.107,设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,联结 ID, IE, IF, IA,则 IA 垂直平分 EF,且

$$EF = 2r\sin\angle AIE = 2r\sin\left(90° - \frac{A}{2}\right) = 2r\cos\frac{A}{2}$$

同理 $FD=2r\cos\frac{B}{2}, DE=2r\cos\frac{C}{2}$

所以

$$DE\cdot EF\cdot FD=8r^3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

又

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

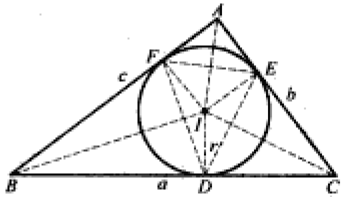


图 1.107

所以

$$DE\cdot EF\cdot FD=2r^3(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{r^3}{R}(a+b+c)$$

所以
$$\frac{DE\cdot EF\cdot FD}{4r}=\frac{r}{2R}\cdot\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

故
$$S_{\triangle DEF}=\frac{r}{2R}S_{\triangle ABC}$$

由欧拉不等式 $R\geqslant 2r$,得

$$S_{\triangle DEF}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

因为
$$S_{\triangle IBC}=\frac{1}{2}ra, 2r=\frac{S_{\triangle ABC}}{p}$$

所以
$$S_{\triangle IBC}=\frac{a}{2p}S_{\triangle ABC}$$

同理
$$S_{\triangle ICA}=\frac{b}{2p}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle IAB}=\frac{c}{2p}S_{\triangle ABC}$$

例 1.25 (《数学通报》2008年8月号问题1746)设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径,r_1,r_2,r_3 分别为 $\triangle IBC,\triangle ICA,\triangle IAB$ 的内切圆半径.求证:

$$r_1+r_2+r_3\geqslant\frac{6(2\sqrt{3}-3)r^2}{R}\qquad(*)$$

证明 如图 1.107,由内角平分线性质知

$$AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}, AI=\frac{bc}{p}\cos\frac{A}{2}, BI=\frac{ac}{p}\cos\frac{B}{2}, CI=\frac{ab}{p}\cos\frac{C}{2}$$

$$r_1=\frac{S_{\triangle IBC}}{\frac{1}{2}(BI+BC+CI)}=\frac{\frac{a}{2p}S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}(\frac{ab}{p}\cos\frac{C}{2}+\frac{ac}{p}\cos\frac{B}{2}+a)}=$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}+p}$$

同理 $r_2=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{a\cos\dfrac{C}{2}+c\cos\dfrac{A}{2}+p}, r_3=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{b\cos\dfrac{A}{2}+a\cos\dfrac{B}{2}+p}$

$$r_1+r_2+r_3=S_{\triangle ABC}\left(\frac{1}{b\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{B}{2}+p}+\frac{1}{a\cos\frac{C}{2}+c\cos\frac{A}{2}+p}+\frac{1}{b\cos\frac{A}{2}+a\cos\frac{B}{2}+p}\right)$$

由柯西不等式知

$$r_1+r_2+r_3\geqslant\frac{9S_{\triangle ABC}}{(b+c)\cos\frac{A}{2}+(c+a)\cos\frac{B}{2}+(a+b)\cos\frac{C}{2}+3p}$$

又

$$(b+c)\cos\frac{A}{2}=2R(\sin B+\sin C)\cos\frac{A}{2}=$$
$$4R\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leqslant 4R\cos^2\frac{A}{2} \quad ①$$

同理

$$(c+a)\cos\frac{B}{2}\leqslant 4R\cos^2\frac{B}{2} \quad ②$$
$$(a+b)\cos\frac{C}{2}\leqslant 4R\cos^2\frac{C}{2} \quad ③$$

所以 $r_1+r_2+r_3\geqslant$

$$\frac{9S_{\triangle ABC}}{4R(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2})+3R(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

又易知

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4} \quad ④$$
$$\sin A+\sin B+\sin C\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3} \quad ⑤$$
$$p\geqslant 3\sqrt{3} \quad ⑥$$

所以 $r_1+r_2+r_3\geqslant\dfrac{9S_{\triangle ABC}}{9R+\dfrac{9\sqrt{3}}{2}R}=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{(2+\sqrt{3})R}=\dfrac{2rp}{(2+\sqrt{3})R}\geqslant$

$$\frac{6\sqrt{3}r^2}{(2+\sqrt{3})R}=\frac{6\sqrt{3}(2-\sqrt{3})r^2}{R}=\frac{6(2\sqrt{3}-3)r^2}{R}$$

由①,②,③,④,⑤,⑥式等号成立的条件知,不等式(*)等号成立当且仅当$\triangle ABC$为正三角形.

定理16 任意三个正实数a,b,c均成某一三角形三边的充要条件是存在着三个正数x,y,z,使得$a=y+z,b=z+x,c=x+y$.

证明 充分性:若$a=y+z,b=z+x,c=x+y$,则$a+b=x+y+2z>x+z=c$,同理可证:$b+c>a,c+a>b$,因而a,b,c构成某一三角形的三边.

必要性:设a,b,c是$\triangle ABC$的三边长,如图1.107,作$\triangle ABC$的切点三角形DEF,则显然有$AE=AF=x,BF=BD=y,CD=CE=z$,且$a=y+z$,$b=z+x,c=x+y$.

此定理在证明某些三角形关系时很有用,因为代换后,将三角形中边长的关系式转化为三个正数的关系式,也就是说条件将削弱了.联系定理14,15知:

(1) $x=p-a,y=p-b,z=p-c$.

(2) $S_{\triangle ABC}=\sqrt{xyz(x+y+z)}$.

(3) $r=\sqrt{\dfrac{xyz}{(x+y+z)}}$.

(4) $R=\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$.

定理17 若I为$\triangle ABC$的内心,则有不等式

$$AI+BI+CI\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(AB+BC+CA)$$

由定理16及余弦定理得

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}}{2}}=\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}$$

所以
$$IA=\frac{x}{\cos\dfrac{A}{2}}=\sqrt{\frac{x(x+y)(x+z)}{x+y+z}}$$

同理
$$IB=\sqrt{\frac{y(y+x)(y+z)}{x+y+z}},IC=\sqrt{\frac{z(z+x)(z+y)}{x+y+z}}$$

又
$$AB+BC+CA=2(x+y+z)$$

所以原不等式等价于

$$\sum\sqrt{\frac{x(x+y)(y+z)}{x+y+z}}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\sum x(\sum\text{ 表示循环和,下同})\qquad①$$

由式①的齐项式知可设 $x+y+z=1$，将式①两边平方和

$$\sum x(x+y)(x+z)+2\sum(y+z)\sqrt{yz(x+y)(x+z)}\leqslant\frac{4}{3} \quad ②$$

又

$$\begin{aligned}\sum x(x+y)(x+z)&=\sum x(1-z)(1-y)=\\&\sum(x-xy-xz+xyz)=\\&x+y+z-2(xy+yz+zx)+3xyz=\\&1-2(xy+yz+zx)+3xyz \quad ③\end{aligned}$$

$$\sum x(x+y)(x+z)+2\sum(y+z)\sqrt{yz(x+y)(x+z)}\leqslant\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}&\sum(1-x)(xz+yz+xy+yz)=\\&(xy+yz+zx)\sum(1-x)+\sum yz-\sum xyz=\\&3(xy+yz+zx)-3xyz \quad ④\end{aligned}$$

③+④得

$$\begin{aligned}&\sum x(x+y)(x+z)+2\sum(y+z)\sqrt{yz(x+y)(x+z)}\leqslant\\&1-2(xy+yz+zx)+3xyz+3(xy+yz+zx)-3xyz=\\&1+xy+yz+zx\leqslant1+\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

所以式②成立，故结论成立.

例 1.26 （第 6 届 IMO 试题）已知 a,b,c 是任意一三角形三边长.

求证：$a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)\leqslant3abc$.

证明 由定理 16 知：存在正数 x,y,z 使 $a=y+z,b=z+x,c=x+y$，则

$$\begin{aligned}&a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)=\\&2(y+z)^2x+2(z+x)^2y+2(x+y)^2z=\\&2[(x+y)(y+z)(z+x)+4xyz]\end{aligned}$$

从而所证不等式等价于

$$2[(x+y)(y+z)(z+x)+4xyz]\leqslant3(x+y)(y+z)(z+x)$$

即

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant8xyz$$

此不等式由均值不等式显然成立，故

$$a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)\leqslant3abc$$

对本定理的应用仅举一例，下面举例说明三角形的内心性质的应用.

例 1.27 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=\angle CBA$，AD,BE,CF 是它的三条高；AP，BQ 是两条角平分线；I,O 分别是它的内心和外心. 求证：若点 D,I,E 共线，则

点 P,O,Q 共线.

证明　如图 1.108,联结 OB,OP,OQ.

因为 D,I,E 共线,所以 $ID \parallel AB$,所以

$$\angle DIB = \angle IBF = \angle IBD$$

所以
$$ID = BD$$

又
$$\angle IDC = \angle DBA, \angle CID = \angle ADB = 90^\circ$$

所以
$$\triangle CID \cong \triangle ADB$$

所以
$$CD = AB$$

因为
$$\angle BOF = 2\angle OCB = \angle ACB$$
$$\angle CDA = \angle OFB = 90^\circ$$

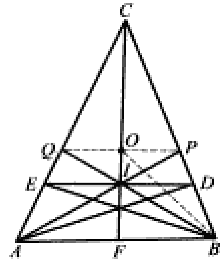


图 1.108

所以 $\triangle ACD \backsim \triangle BOF$,所以 $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{BO}{OF}$. 又 $CO = BO$, $CD = AB$,所以 $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CO}{OF}$.

因为 AP 平分 $\angle CAB$,所以 $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CP}{PB}$,所以 $\dfrac{CO}{OF} = \dfrac{CP}{PB}$,所以 $OP \parallel AB$.

同理 $OQ \parallel AB$,因此 P,O,Q 三点共线.

说明　若 P,O,Q 三点共线,则 D,I,E 三点共线.

例 1.28　H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,分别作 H 关于边 BC,CA,AB 的对称点 H_1,H_2,H_3. 若 P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任意一点,联结 PH_1,PH_2,PH_3 分别与边长 BC,CA,AB 或其延长线交于点 D,E,F. 求证:D,E,F 三点共线.

证明　如图1.109,联结 FH,DH,不妨设 P 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上. 设 AH 垂直于 BC 的垂足为 M,由三角形垂心定理 3 知:H_1,H_2,H_3 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 因为

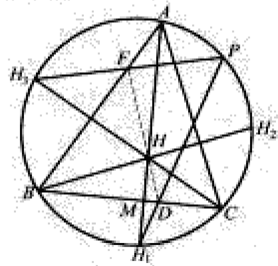


图 1.109

$$\angle H_3PH_1 = \angle H_3AH_1 = 2\angle BAH_1 = 2(90^\circ - \angle ABC) = 180^\circ - 2\angle ABC$$

$$\angle PFH + \angle PDH = 2\angle FH_3H + 2\angle DH_1H = 2\angle PBC + 2\angle PBA = 2\angle ABC$$

所以
$$\angle H_3PH_1 + \angle PFH + \angle PDH = 180^\circ$$

所以
$$\angle FHP + \angle PHD = (180^\circ - \angle PFH - \angle FPH) + (180^\circ - \angle HDP - \angle HPD) = 360^\circ - (\angle FPD - \angle PFH - \angle PDH) = 180^\circ$$

所以 F,H,D 三点共线.

同理,F,H,E 三点共线,故 F,H,D,E 四点共线.

说明 由于过 D,E,F 的直线经过一个特殊点 H，从而可以得到 D,E,F 中的任意两点与 H 共线，达到证明 D,E,F 三点共线。

例 1.29 （1999 年世界城际间联赛）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B$ 内的旁切圆与 CA 相切于 D，$\angle C$ 内的旁切圆与 AB 相切于 E，过 DE 和 BC 的中点 M 和 N 作一直线．求证：直线 MN 平分 $\triangle ABC$ 的周长，且与 $\angle A$ 的角平分线平行．

证明 如图 1.110，过 N 作 $D'E' \mathrel{\underline{\parallel}} DE$，使 N 是 $D'E'$ 中点，则

$$DD' \mathrel{\underline{\parallel}} EE' \mathrel{\underline{\parallel}} MN$$

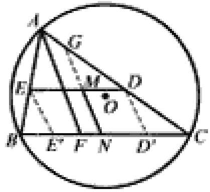


图 1.110

又因为 $\quad BE = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = CD$

且 $BE' \mathrel{\underline{\parallel}} CD'$，所以 $\triangle BEE' \cong \triangle CDD'$，有 $\angle BEE' = \angle CDD'$．

又因为 $\angle BEE' + \angle CDD' = \angle A$，所以 MN 平行于 $\angle A$ 的角平分线．

设 $\angle A$ 的角平分线交 BC 于 F，且设 $AC \geqslant AB$，NM 交 CA 于 G，$\triangle ABC$ 三边的长分别为 a,b,c，则

$$CN = \frac{a}{2},\ CF = \frac{ab}{b+c}$$

由于 $NG \parallel FA$，有 $\frac{CG}{CA} = \frac{CN}{CF}$，即

$$CG = \frac{b \cdot \frac{a}{2}}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{2}$$

故 NG 平分 $\triangle ABC$ 的周长．

例 1.30 （2003 年 IMO 试题）设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形，点 P,Q 和 R 分别是 D 到直线 BC，CA 和 AB 的射影．证明：$PQ = QR$ 的充要条件是 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线的交点在 AC 上．

证明 如图 1.111，由西姆松定理，可知 P,Q,R 三点共线．



图 1.111

而 $\angle DPC = \angle DQC = 90°$，故 D,P,C,Q 四点共圆，于是

$$\angle DCA = \angle DPQ = \angle DPR$$

类似地，由于 D,Q,R,A 共圆，可知 $\angle DAC = \angle DRP$，因

此，$\triangle DCA \backsim \triangle DPR$.

类似地 $\triangle DAB \backsim \triangle DQP$，$\triangle DBC \backsim \triangle DRQ$，因此

$$\frac{DA}{DC}=\frac{DR}{DP}=\frac{DB\cdot\frac{QR}{BC}}{DB\cdot\frac{PQ}{BA}}=\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{BA}{BC}$$

从而 $PQ=QR$ 的充要条件是$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}$.

而 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线分 AC 的比分别为$\frac{BA}{BC}$ 和$\frac{DA}{DC}$.

所以，命题成立.

例 1.31 （第 4 届 CMO 试题）设点 D,E,F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上，且 $\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$ 的内切圆有相等的半径 r，又以 r_o 和 R 分别表示 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，求证：$r+r_o=R$.

证法 1 如图 1.112，作辅助线，则

$$S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BDF}-S_{\triangle CED}-S_{\triangle AFE}=S_{\triangle DEF} \quad ①$$

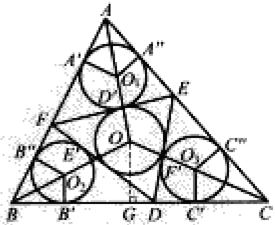


图 1.112

设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长分别为 L 与 L'，则由式 ① 可得

$$R\cdot\frac{L}{2}-r\cdot\frac{L+L'}{2}=r_o\cdot\frac{L'}{2}$$

即

$$(R-r)L=(r+r_o)L' \quad ②$$

因为 O 为 $\triangle ABC$ 的内心，$OG\perp BC$ 于 G，所以

$$\triangle O_2BB'\backsim\triangle OBG$$

所以$\frac{BB'}{BG}=\frac{r}{R}$，所以 $BB'=\frac{r}{R}BG$，同理还有五个类似的关系式（*）.

又

$$A'B''+B'C''+C'A''=L'$$

所以

$$AA'+B''B'+BB'+C''C+CC'+A''A=L-L' \quad ③$$

将式（*）中提到的六个等式相加并利用 ③，得

$$L-L'=\frac{r}{R}L \quad ④$$

即
$$(R-r)L=RL'$$

由 ①④ 可得

$$RL' = (r + r_0)L'$$

故

$$r + r_0 = R$$

证法 2 如图 1.113,作辅助线,其中 O_1,O_2,O_3 表示三个相等的内切圆的圆心,由切线长定理可知

$$DE + EF + FD =$$
$$DF_1 + F_1E + ED_1 + D_1F + F_1E_1 + E_1D =$$
$$DC_2 + EC_1 + EA_2 + FA_1 + FB_2 + B_1D =$$
$$B_1C_2 + C_1A_2 + A_1B_2 =$$
$$O_2O_3 + O_3O_1 + O_1O_2$$

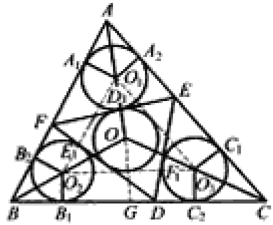


图 1.113

即 $\triangle DEF$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 的周长相等.

很显然,AO_1,BO_2,CO_3 的交点 O 既是 $\triangle ABC$ 的内心,又是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内心,所以 $r + r_1 = R$,这里 r_1 表示 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内切圆半径,因此,要证明 $r + r_0 = R$,只须证明 $r = r_0$,由于已证 $\triangle DEF$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 的周长相等,根据三角形的面积公式 $S = pr$(p 表示三角形的半周长),只须证 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle O_1O_2O_3}$.

事实上

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CDE}) =$$
$$S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2}r(AB + BC + CA + EF + DF + DE) =$$
$$S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2}r(AB + BC + CA + O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_1) =$$
$$S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2}r(AB + O_1O_2) - \frac{1}{2}r(BC + O_2O_3) - \frac{1}{2}r(CA + O_3O_1) =$$
$$S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABO_2O_1} - S_{\triangle BCO_3O_2} - S_{\triangle CAO_1O_3} = S_{\triangle O_1O_2O_3}$$

故

$$r + r_0 = R$$

证法 3 如图 1.114,设 $\triangle ABC$,$\triangle DEF$ 的半周长分别为 P,P_0,设 $\triangle AEF$ 的内切圆与 AC,AB 切于点 G_1,G_2,类似定义 H_1,H_2,I_1,I_2.

由切线长相等,有

$$P - P_0 = AG_1 + BH_1 + CI_1 = r_1\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

即

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{P - P_0}{r_1}$$

又在 $\triangle ABC$ 中，有

$$P = R(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2})$$

即
$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{P}{R}$$

因此
$$Pr_1 = (P - P_0)R \quad ⑤$$

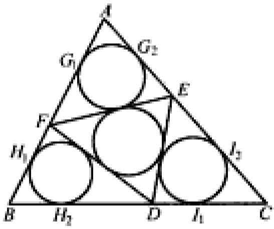


图 1.114

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle DEF}$

得
$$PR = (P + P_0)r_1 + P_0r_0$$

即
$$PR = Pr_1 + P_0r_1 + P_0r_0 \quad ⑥$$

将式⑤代入⑥，有 $PR = (P - P_0)R + P_0r_1 + P_0r_0$，即 $R = r + r_o$.

练习 4

1.（1982 年四川省数学竞赛试题）如图 1.115，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 4$，$AC = 6$，$BC = 5$，$\angle A$ 的平分线 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 K. O，I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、内心. 求证：$OI \perp AK$.

2. 如图 1.116，设点 M 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边的中点，I 是其内心，AH 是 BC 边上的高，E 为直线 IM 与 AH 的交点. 求证：AE 等于内切圆半径 r.

3.（第 29 届 IMO 中国国家集训队选拔赛试题）如图 1.117，在 $\triangle ABC$ 中，O 是外心，I 是内心，$\angle C = 30°$，边 AC 上的点 D 与边 BC 上的点 E 使 $AD = BE = AB$.

求证：$OI \perp DE$，$OI = DE$.

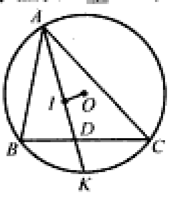


图 1.115

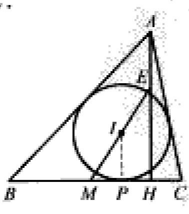


图 1.116

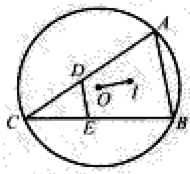


图 1.117

第 5 节　三角形旁心的概念和性质

我们把三角形的一边与另一边的延长线所成的角，叫做三角形的外角. 如图 1.118 中，$\angle ACD$ 就是 $\triangle ABC$ 的一个外角，相对于外角来说，通常把三角形的角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle ACB$ 叫做 $\triangle ABC$ 的内角.

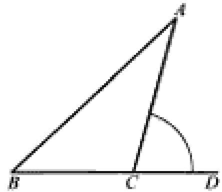


图 1.118

三角形的每个外角都有一个和它相邻的内角，$\angle ACB$ 就是外角 $\angle ACD$ 相邻的内角. 显然，三角形的每个内角和它相邻的外角互补.

每个三角形有三条内角平分线，也有三条外角平分线. 如图 1.119 所示，我们作出 $\triangle ABC$ 的三条外角平分线，但这三条外角平分线并不相交于一点，而是两两相交于 I_1, I_2, I_3 三点. 现在，来作出三角形的三条内角平分线与三条外角平分线，如图 1.120 所示；通过作图和观察，我们发现不管三角形形状怎样都有：

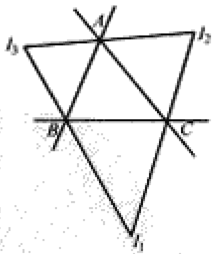


图 1.119

(1) 内角 $\angle A$ 的平分线与 $\angle B$，$\angle C$ 的外角平分线相交于一点 I_1，而且这点 I_1 到三边 BC，CA，AB 的距离相等，即 $I_1P = I_1Q = I_1S$.

(2) 内角 $\angle B$ 的平分线与 $\angle A$，$\angle C$ 的外角平分线相交于一点 I_2，这点 I_2 到三边距离相等.

(3) 内角 $\angle C$ 的平分线与 $\angle A$，$\angle B$ 的外角平分线相交于一点 I_3，这点 I_3 到三边距离相等.

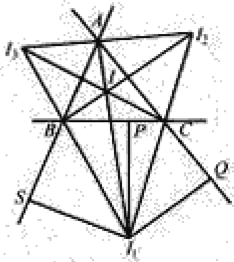


图 1.120

由此得到：

三角形旁心定理　三角形每一内角的平分线(所在直线)和其余两角的外角平分线相交于一点(这样的点共有三个)，这些点分别到三边距离相等.

这个定理的正确性，完全可以用类似于三角形内心定理的证明方法证明.

已知：如图 1.121，AD 为内角 $\angle A$ 的平分线，BE，CF 为外角 $\angle CBQ$，$\angle BCP$ 的平分线. 求证：AD，BE，CF 相交于一点 I_1，且这点 I_1 到三边的距离相等.

证明　先证两外角 $\angle CBQ$，$\angle BCP$ 的平分线 BE，CF 相交于一点 I_1；再证 I_1 到各边的距离相等；由此进而推知 I_1 在内角 $\angle A$ 的平分线 AD 上．这就证明了 AD，BE，CF 三线共点，且交点 I_1 到三边的距离相等．

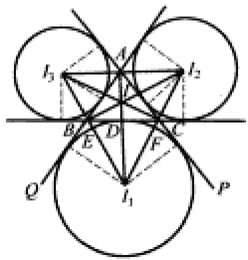


图 1.121

我们把这样的点叫做三角形的旁心．很明显，每个三角形都各有三个旁心，如图 1.121 中，I_1，I_2，I_3 就是 $\triangle ABC$ 的三个旁心，而且这三个旁心都在三角形外．

三角形的三个旁心，通常分别用 I_a，I_b，I_c（或 I_1，I_2，I_3）表示．并且习惯上，在内角 $\angle A$ 的平分线上的旁心记作 I_a（或 I_1），在内角 $\angle B$，$\angle C$ 的平分线上的旁心，分别记作 I_b，I_c（或 I_2，I_3）．有三角形的旁心定理及前面的启示，易知三角形的旁心具有如下基本定理：

（1）$\triangle ABC$ 的三个旁心实际就是 $\triangle ABC$ 的三条外角平分线，两两相交所得到的三个交点作为顶点而构成的三角形，这样的 $\triangle I_1I_2I_3$（或 $\triangle I_aI_bI_c$）称为 $\triangle ABC$ 的旁心三角形（或称为 $\triangle ABC$ 的外角平分线构成的三角形）．

（2）因为每个三角形各有三个旁心，每个旁心都分别是到三角形三边等距离的点，所以，以三角形的旁心为圆心，旁心到三边距离为半径作圆，这样的圆和三角形的三边都相切，叫做三角形的旁心圆，并且每个三角形都有三个旁心圆．

（3）从图 1.121 中，易知：四点 I_1，I_2，I_3 和 I 是一个垂心组，即为 I 为 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心，I_1，I_2，I_3 分别为 $\triangle II_2I_3$，$\triangle II_1I_3$，$\triangle II_1I_2$ 的垂心．且 I，A，B，I_c；I，B，C，I_a 与 I，C，A，I_b 分别四点共圆，即为三角形的内心与三角形一边的两个端点及相应的旁心四点共圆．

对于三角形的旁心，除了具有以上基本定理外，还具备了如下定理．为了叙述方便，我们先约定：

$\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 的边长分别为 a，b，c，面积、半周长、内切圆、外接圆半径分别为 s，p，r，R；分别与 BC，CA，AB 外侧相切的旁切圆圆心分别为 I_a，I_b，I_c，其半径分别为 r_a，r_b，r_c，则

定理 1　三角形的内心是它的旁心三角形的垂心．

定理 2　$\angle BI_aC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle A$，$\angle BI_bC = \angle BI_cC = \dfrac{1}{2}\angle A$（对于 $\angle B$，$\angle C$ 也有类似的式子）．

事实上,如图 1.121,因为易知 B,I_a,C,I 四点共圆,所以

$$\angle BIC + \angle BI_aC = 180°$$

又
$$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

所以
$$\angle BI_aC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$$

又 A,I,C,I_b 与 A,I,B,I_c 分别四点共圆,所以

$$\angle BI_bC = \angle II_bC = \angle IAC = \frac{1}{2}\angle A = \angle II_cB = \angle BI_cC$$

即
$$\angle BI_bC = \angle BI_cC = \frac{1}{2}\angle A$$

定理 3 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的内角平分线交外接圆于点 D,以 D 为圆心,DC 为半径作圆,与直线 AD 相交于两点 I 和 I_a,则这两点 I 于 I_a 恰好就是 $\triangle ABC$ 的内心与旁心.(对于 $\angle B,\angle C$ 也有同样的结论)

事实上,如图 1.122,显然 $DB = DC = DI$,由三角形内心定理 4 知 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

又由 $CI \perp CI_a$ 及 CI 是 $\angle ACB$ 的平分线知:CI_a 为外角 $\angle BCH$ 的平分线,于是 I_a 就是内角平分线 AD 与另一条外角平分线的交点.因此,I_a 为 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

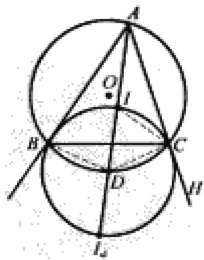


图 1.122

例 1.32 (2005 年全国高中数学联赛加试第一题)已知 $\triangle ABC$ 内接于圆,$AB > AC$,过点 A 作圆的切线 l.以 A 为圆心、AC 为半径的圆交 l 于 E,F,且交 AB 于 D.求证:DE,DF 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心和一个旁心.

证明 如图 1.123,作 $\angle BAC$ 的平分线交 DE,DF 于点 I,K,联结 CE,CI.因为

$$\angle IEC = \angle DEC = \frac{1}{2}\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle IAC$$

所以,A,I,C,E 四点共圆.此时

$$\angle CIE = \angle CAE = \angle ABC = \angle DBC$$

因此,B,C,I,D 四点共圆,于是

$$\angle BCI = \angle ADE = \angle AED = \angle AEI = \angle ACI$$

即 CI 平分 $\angle ACB$,故 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

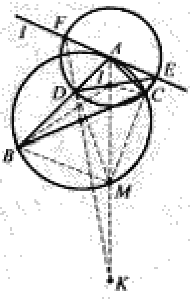


图 1.123

下面利用旁心定理 3 证明:K 是 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

如图 1.123,设 AK 交 $\triangle ABC$ 外接圆于点 M,联结 MB,MD,MC,BI.

由内心定理知 $MI = MB = MC$，M 是 $\triangle IBC$ 的外心.

而 B, C, I, D 四点共圆，可知 $MD = MI$. 但 $\angle IDK = 90°$，所以

$$\angle K = 90° - \angle DIK = 90° - \angle MDI = \angle MDK$$

故
$$MK = MD = MI$$

又因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，M 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，所以，K 必是 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

定理 4 一个旁心与三角形三条边的端点联结所组成的三个三角形面积的比等于原三角形三条边的比，即

$$S_{\triangle I_aBC} : S_{\triangle I_aAC} : S_{\triangle I_aAB} = a : b : c$$

$$S_{\triangle I_bBC} : S_{\triangle I_bAC} : S_{\triangle I_bAB} = a : b : c$$

$$S_{\triangle I_cBC} : S_{\triangle I_cAC} : S_{\triangle I_cAB} = a : b : c$$

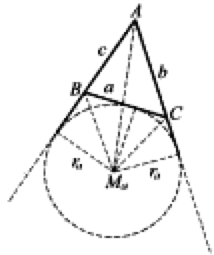


图 1.124

证明 如图 1.124，因为旁心到三边（或延长线）的距离都等于旁切圆的半径，易证

$$S_{\triangle I_aBC} = \frac{1}{2}ar_a, S_{\triangle I_aAC} = \frac{1}{2}br_a, S_{\triangle I_aAB} = \frac{1}{2}cr_a$$

所以

$$S_{\triangle I_aBC} : S_{\triangle I_aAC} : S_{\triangle I_aAB} = \frac{1}{2}ar_a : \frac{1}{2}br_a : \frac{1}{2}cr_a = a : b : c$$

同理可证其他二式.

定理 5 三个旁心与三角形一条边的端点联结所组成的三个三角形面积的比等于三个旁切圆半径的比，即

$$S_{\triangle I_aBC} : S_{\triangle I_bBC} : S_{\triangle I_cBC} = r_a : r_b : r_c$$

$$S_{\triangle I_aAC} : S_{\triangle I_bAC} : S_{\triangle I_cAC} = r_a : r_b : r_c$$

$$S_{\triangle I_aAB} : S_{\triangle I_bAB} : S_{\triangle I_cAB} = r_a : r_b : r_c$$

证明 如图 1.125，因为 I_a, I_b, I_c 到 BC（或延长线）的距离分别为 r_a, r_b, r_c，所以

$$S_{\triangle I_aBC} = \frac{1}{2}ar_a, S_{\triangle I_bBC} = \frac{1}{2}ar_b, S_{\triangle I_cBC} = \frac{1}{2}ar_c$$

故
$$S_{\triangle I_aBC} : S_{\triangle I_bBC} : S_{\triangle I_cBC} = \frac{1}{2}ar_a : \frac{1}{2}ar_b : \frac{1}{2}ar_c = r_a : r_b : r_c$$

同理可证其他二式.

定理 6 $r_a = \dfrac{s}{p-a} = 4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$r_b = \frac{s}{p-b} = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$r_c = \frac{s}{p-c} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

且
$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

$$s = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = rp$$

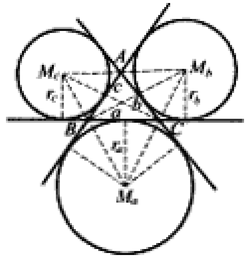


图 1.125

证明 如图 1.126，易证 $S_{\triangle I_aBC} = \frac{1}{2}ar_a$，所以

$$S = S_{四边形ABI_aC} - S_{\triangle I_aBC} = \frac{1}{2}r_a(b+c) - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}r_a(b+c-a) = \frac{1}{2}r_a(a+b+c-2a) = r_a(p-a)$$

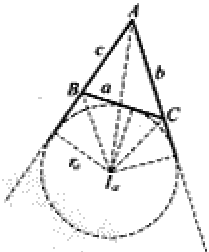


图 1.126

所以
$$r_a = \frac{s}{p-a} = \frac{2s}{-a+b+c} = \frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{2R(-\sin A+\sin B+\sin C)} = \frac{2R\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

同理可证其他二式.

又

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) + 4R\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) = 4R\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2} + 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 4R\left(\sin^2\frac{C}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right) = 4R$$

即
$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

于是结论得证.

定理 7 三角形的内心与旁心距离为

$$II_a = \frac{a\sqrt{bcp(p-a)}}{p(p-a)}$$

$$II_b = \frac{b\sqrt{acp(p-b)}}{p(p-b)}$$

$$II_c = \frac{c\sqrt{abp(p-c)}}{p(p-c)}$$

证明 如图 1.127，在 Rt$\triangle IHI_a$ 中，$HI_a = r_a - r$，$\angle I_aIH = \frac{A}{2}$，所以

$$II_a = \frac{r_a - r}{\sin\frac{A}{2}}\text{（是内切圆半径）}$$

$$r_a - r = \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p} = \frac{Sa}{p(p-a)} = \frac{a\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

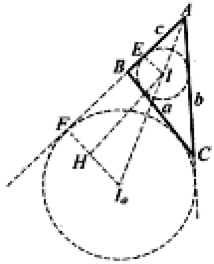


图 1.127

由余弦定理

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

所以
$$1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

所以
$$II_a = \frac{\frac{a\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}} = \frac{a\sqrt{bcp(p-a)}}{p(p-a)}$$

同理可证其他二式.

定理 8 三角形的旁心距分别为

$$I_aI_b = 4R\cos\frac{C}{2}$$

$$I_aI_c = 4R\cos\frac{B}{2}$$

$$I_bI_c = 4R\cos\frac{A}{2}$$

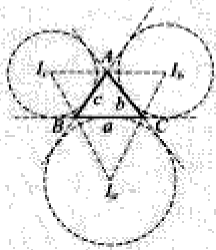


图 1.128

证明 如图 1.128，在 $\triangle I_aBC$ 中，由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin\angle I_a} = \frac{I_aC}{\sin A}$$

所以 $$I_aC=\frac{a\sin A}{\sin\angle I_a}=\frac{a\sin\frac{\pi-B}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{a\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

在 $\triangle I_bAC$ 中，同理得

$$CI_b=\frac{b\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

所以 $$I_aI_b=I_aC+CI_b=\frac{a\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{b\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin A\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{2R\sin B\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=$$

$$4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}=4R\sin\frac{A+B}{2}=4R\cos\frac{C}{2}$$

同理可证其他二式.

定理 9 $\triangle ABC$ 是 $\triangle I_aI_bI_c$ 的垂足三角形，且 $\triangle I_aI_bI_c$ 的外接圆半径 R' 等于 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $2R$.

本定理已在三角形的关于垂心的垂足三角形中已经证明过.

定理 10 设 I_a 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的旁心，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，则

$$\frac{I_aA}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{I_aB}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{I_aC}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=4R$$

证明 在 $\triangle ACI_a$ 中，由正弦定理，有

$$\frac{AC}{\sin\angle AI_aC}=\frac{I_aA}{\sin\angle ACI_a}$$

即 $$\frac{AC}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{I_aA}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}\right)}=\frac{I_aA}{\cos\frac{C}{2}}$$

所以 $$I_aA=\frac{AC\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{2R\sin B\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

同理 $$I_aB=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2},\ I_aC=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

故知结论成立.

定理 11 若 $\triangle ABC$ 的半周长与外接圆半径分别为 p 与 R，则

$$S_{\triangle I_aI_bI_c}=2pR$$

事实上，由于 $\triangle ABC$ 是 $\triangle I_aI_bI_c$ 的关于垂心 I 的垂足三角形，则

$$S_{\triangle I_aI_bI_c}=2r^2\sin I_a\sin I_b\sin I_c$$

且 $\triangle ABC$ 的周长 $$L=4r\sin I_a\sin I_b\sin I_c$$

其中，r 为旁心三角形的外接圆半径，所以

$$\frac{1}{2}rL=2r^2\sin I_a\sin I_b\sin I_c$$

所以 $$S_{\triangle I_aI_bI_c}=\frac{1}{2}rL$$

又 $$r=2R,L=2p$$

故 $$S_{\triangle I_aI_bI_c}=2pR$$

定理 12 过旁心 I_a 的直线与 AB，AC 所在直线分别交于 P，Q，则

$$\frac{AB}{AP}\cdot\sin B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin C=-\sin A+\sin B+\sin C$$

证明 如图 1.129，先看一般情形．设 M 为 BC 边上任意一点，直线 PQ 分别交 AB，AM，AC 所在直线于 P，N，Q，则

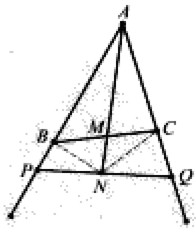


图 1.129

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AN-NM}{AN}=\frac{S_{\triangle APQ}-S_{\triangle MPQ}}{S_{\triangle APQ}}=$$

$$\frac{S_{\triangle APM}+S_{\triangle AQM}}{\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{AP}{AB}S_{\triangle ABM}+\frac{AQ}{AC}S_{\triangle ACM}}{\frac{AP}{AB}\cdot\frac{AQ}{AC}S_{\triangle ABC}}=$$

$$\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABM}}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACM}}=\frac{AC}{AQ}\cdot\frac{BM}{BC}+\frac{AB}{AP}\cdot\frac{CM}{BC} \qquad ①$$

当 N 为 $\triangle ABC$ 内 $\angle A$ 的旁心时，由三角形内、外角平分线定理知

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BM}{BM+MC}=\frac{AB}{AC+AB}\Rightarrow\frac{BM}{BC}=\frac{AB}{AB+AC} \qquad ②$$

$$\frac{CM}{BC}=\frac{AC}{AB+AC} \qquad ③$$

又 $$\frac{AN}{NM}=\frac{AB}{BM}\Rightarrow\frac{AN}{AN-NM}=\frac{AB}{AB-BM}$$

所以 $$\frac{AN}{AM}=\frac{AB}{AB-\frac{AB\cdot BC}{AB+AC}}=\frac{AB+AC}{-BC+AB+AC}$$

所以

$$\frac{AM}{AN}=\frac{-BC+AB+AC}{AB+AC} \qquad ④$$

把 ②,③,④ 代入 ① 而得

$$\frac{AC}{AQ}\cdot AB+\frac{AB}{AP}\cdot AC=-BC+AB+AC$$

即
$$\frac{AB}{AP}\cdot\sin B+\frac{AC}{AQ}\cdot\sin C=-\sin A+\sin B+\sin C$$

下面举例说明三角形旁心定理的应用.

例 1.33 如图 1.130,设圆 O 是 $\triangle ABC$ 的与 BC 边相切的旁切圆,D,E,F 分别是圆 O 与 BC,CA,AB 所在直线的切点,若 OD 与 EF 相交于 K,求证:AK 平分 BC.

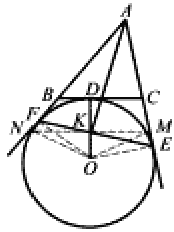


图 1.130

证明 过 K 作 BC 的平行线分别交 AB,AC 于 N,M,联结 OE,OF,OM,ON.

由 K,O,E,M 四点共圆,有

$$\angle OME=\angle OKE=\angle ONF$$

而 $OE=OF$,且 $\angle OEM=\angle OFN=90^\circ$,故 $Rt\triangle OEM\cong Rt\triangle OFN$,从而 $OM=ON$.

在等腰 $\triangle OMN$ 中,OK 为底边 MN 的中线. 而 $BC\parallel NM$,故知 AK 平分 BC.

例 1.34 如图 1.131,D 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 的旁切圆 I_a 与 BC 的切点,E 是 BC 上任一内点,$\triangle ABE$ 及 $\triangle ACE$ 与 BC 边相切的旁切圆圆心分别为 I_1,I_2 求证:$I_1D\perp I_2D$.

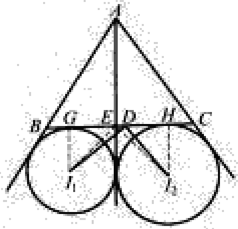


图 1.131

证明 设圆 I_1,圆 I_2 分别切 BC 于 G,H,联结 I_1E,I_1G,I_2E,I_2H,则有 $I_1G\perp BC,I_2H\perp BC$.

又 $\angle I_1EI_2=\frac{1}{2}\angle BEC=90^\circ$,故 $I_1E\perp I_2E$. 易知 $Rt\triangle I_1GE\backsim Rt\triangle EHI_2$,从而 $GE:I_2H=I_1G:EH$.

又设 $\triangle ABE,\triangle ACE,\triangle ABC$ 的半周长分别为 p_1,p_2,p,则

$$BG=p_1-AB,BD=p-AB,p=p_1+p_2-AE$$

于是
$$DG=BD-BG=p-p_1=p_2-AE=EH$$

同理
$$GE=DH$$

于是
$$I_2H:DH=DG:I_1G$$

即有
$$Rt\triangle I_1GD\backsim Rt\triangle DHI_2$$

故得
$$\angle I_1DG+\angle I_2DH=90^\circ$$

所以
$$\angle I_1DI_2=90^\circ$$

即 $$I_1D \perp I_2D$$

例 1.35 （第 35 届 IMO 试题改编）设 I 为 $\triangle ABC$ 的旁心，其 $\triangle ABC$ 旁切圆切边 AC 于点 L，切边 BA 和 BC 的延长线分别于点 M 和 K，过点 B 平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S。求证：$\angle RIS$ 为锐角。

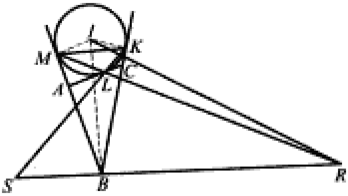


图 1.132

证明　如图 1.132，联结 BI，MI，KI。在 $\triangle BKS$ 与 $\triangle LMK$ 中

$$\angle LKM = \angle KSB, \angle BKS = \angle LMK$$

于是 $$\triangle BKS \backsim \triangle LMK$$

从而 $$\frac{BK}{BS} = \frac{LM}{LK}$$

同理可证 $$\frac{BR}{BM} = \frac{LM}{LK}$$

于是 $$BS \cdot BR = BK \cdot BM$$

又显然 $$BI \perp MK, BK = BM$$

从而 $$BS \cdot BR = BM^2 < BI^2$$

即 $$BS \cdot BR < BI^2$$

这表明：在 BI 内存在点 P，使得 $BR \cdot BS = BP^2$。

在 $\triangle RPS$ 中，应用射影定理的逆定理，可知 $\angle RPS = 90°$，于是点 I 在以 RS 为直径的圆的外部，从而 $\angle RIS < 90°$。

例 1.36 （第 12 届 IMO 试题）设点 M 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的任一内点，r_1，r_2，r 分别是 $\triangle AMC$，$\triangle BMC$，$\triangle ABC$ 的内切圆半径；q_1，q_2，q 分别是这些三角形在 $\angle ACM$，$\angle BCM$，$\angle ACB$ 内的旁切圆半径。试证：$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{q}$。

证明　如图 1.133，设 $\angle CAB = \alpha$，$\angle ABC = \beta$，$\angle BCA = \gamma$，$\angle AMC = \delta$，又设 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心为 R，且与 AB 切于 P，于是 $\angle APR = \angle BPR = \frac{\pi}{2}$，从而有

$$AB = r\cot\frac{\alpha}{2} + r\cot\frac{\beta}{2} = r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right) \quad ①$$

由于三角形的内、外分角线互相垂直，因而类似地有

$$AB = q\tan\frac{\alpha}{2} + q\tan\frac{\beta}{2} = q\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) \quad ②$$

由 ① 和 ② 可得

$$\frac{r}{q}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} \quad ③$$

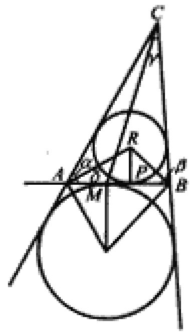


图 1.133

类似的结论对于 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMC$ 也成立，故有

$$\frac{r_1}{q_1}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2} \quad ④$$

和

$$\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\pi-\delta}{2}=\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\delta}{2} \quad ⑤$$

将 ④，⑤ 相乘，并利用 ③ 得

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2}\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\delta}{2}=$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{q}$$

例 1.37 （2004 中国国家队培训试题）P 是 $\triangle ABC$ 内一点，点 P 在三边 BC，CA，AB 上的射影分别为 D，E，F，且满足 $AP^2+PD^2=BP^2+PE^2=CP^2+PF^2$，记 I_a，I_b，I_c 为 $\triangle ABC$ 的旁心，证明：点 P 为 $\triangle I_aI_bI_c$ 的外心．

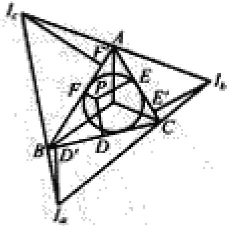


图 1.134

证明 如图 1.134，设 I_a，I_b，I_c 在 BC，CA，AB 上的射影分别为 D'，E'，F'，并设 AB，BC，CA 的长分别为 c，a，b，则可知

$$AE'=BD'=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$$

$$BF'=CE'=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}$$

$$AF'=CD'=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+c-b}{2}$$

另由条件可知 $$AP^2-PF^2=CP^2-PD^2$$

所以 $AF^2=CD^2$，于是 $AF=CD$．同理可知

$$AE=BD,CE=BF$$

设 $AF=CD=x$，$AE=BD=y$，$CE=BF=z$，则

$$x+z=c,y+x=a,y+z=b$$

可得 $$x=\frac{a+c-b}{2},y=\frac{b+a-c}{2},z=\frac{b+c-a}{2}$$

所以 $AF = AF', AE = AE', BD = BD'$

所以 F, F'; E, E'; D, D' 分别重合. 故

$$PI_c \perp AB, PI_b \perp AC, PI_a \perp BC$$

又因为 $\angle CBI_a = \angle ABI_c$, I_a, B, I_c 共线, 所以 $\angle PI_cI_a = \angle PI_aI_c = 90^\circ - \angle I_aBC$, 所以 $PI_a = PI_c$.

同理 $PI_b = PI_a$, 所以 $PI_a = PI_b = PI_c$.

即 P 为 $\triangle I_aI_bI_c$ 的外心.

练习 5

1. 如图 1.135, PA, PB 切圆 O 于 A, B 两点, 过 OP 与 AB 的交点 Q 任作圆 O 的弦 CD. 求证: $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 有一个相同的旁心.

2. (第 39 届 IMO 试题) 如图 1.136, 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 其 $\triangle ABC$ 内切圆切三边 BC, CA 和 AB 于点 K, L, M, 过点 B 平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S.

求证: $\angle RIS$ 为锐角.

3. 如图 1.137, 半径为 ρ 的圆与 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 相切, 其圆心 K 到 BC 边的距离为 d. 设 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, r 与 p 分别表示 $\triangle ABC$ 的内切圆半径和半周长.

(1) 证明: $a(d - \rho) = 2p(r - \rho)$.

(2) 设 $\angle A$ 内的 $\triangle ABC$ 的旁切圆半径为 r_a, 圆 K 交 BC 边于 D, E, 求证:

$$DE = \frac{\sqrt{rr_a(\rho - r)(r_a - \rho)}}{r_a - r}.$$

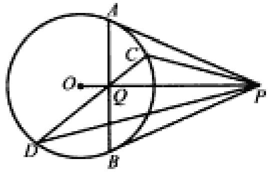


图 1.135

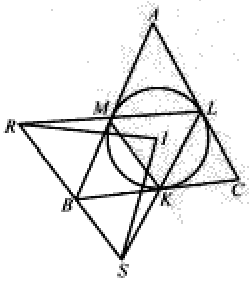


图 1.136

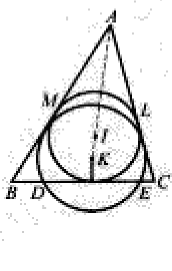


图 1.137

第6节 众心关联和众心共图

前面，我们对三角形的五心的概念和定理分别进行了论述.

在论述的过程中，分别证明了三角形的外心、内心、垂心、重心与旁心定理，这五心定理的证明都涉及三线共点问题. 因此，我们一起总结一下证明线共点问题的一些常用方法.

(1) 要证三直线相交于一点，可以先证其中的两直线相交，然后再证这个交点在第三条直线上. 如三角形外心定理的证明.

(2) 要证三条直线相交于一点，可以先证其中的两条直线相交，然后把这个交点和第三条直线的一点连成直线，再证这条直线就是第三条直线. 如三角形重心定理的证法2.

(3) 要证三条直线相交于一点，可设法证明这三条直线中，两两相交的交点重合为同一个点. 如 $\triangle ABC$ 的切点三角形 $\triangle DEF$ 的定理1的证明.

(4) 要证三条直线相交于一点，可以设法证明这三条直线都经过某定点. 如定点为三角形的外心、垂心、内心、重心、旁心等.

(5) 要证三条直线相交于一点，可以设法把要证的三条直线化为已经是共点的三条直线. 如三角形垂心定理的证明.

(6) 要证三条直线相交于一点，除了可用上述方法以外，还可以运用塞瓦定理的逆定理等来证明.

在本节里，我们想通过三角形的"多心"共处于一个图形中，来进一步阐述三角形的外心、垂心、重心、内心和旁心的一些定理及其运用.

定理1 三角形的内心和任一顶点的连线延长与三角形的外接圆相交，这个交点与外心的连线是这一顶点所对边的中垂线（如图1.101中，OA_1 是 BC 边的中垂线）.

定理2 三角形的任一顶点到垂心的距离等于外心到对边距离的两倍，此即为前面的三角形的垂心定理7.

定理3 三角形的内心和任一顶点的连线，平分外心与该顶点以及垂心与该顶点连线所成的角（如图1.83中，AN 平分 $\angle MAD$）.

定理4 三角形的外心、垂心、重心三点共线，且重心与垂心的距离等于外心与重心距离的两倍.

事实上，如图1.138，设 M 为 AB 中点，联结 CM，则重心 G 在 CM 上，且 $CG=2GM$，联结 OM，则 OM 垂直平分 AB，延长 OG 到 H 使 $HG=2GO$，联结 CH，

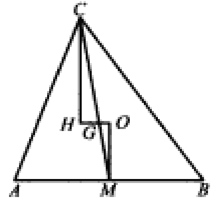


图 1.138

因为

$$\angle CGH = \angle MGO$$

所以 $\triangle CHG \backsim \triangle MOG$

所以 $\angle HCG = \angle OGM$

从而 $CH \parallel OM$，即 $CH \perp AB$，同理 $AH \perp BC$，即 H 为垂心，故命题得证.

这个定理是著名数学家欧拉于 1765 年提出并证明的，因此，通常我们把直线 OGH 叫做欧拉线. 它在解题中有重要应用.

例 1.38 （《中等数学》6(1999) 第 47 页，数学奥林匹克问题）在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 30°$，AD，BE 是两条高，H 为垂心，G 为 $\triangle ABH$ 的重心，直线 CG 交 AB，AD 于 M，N. 求证：$\triangle AMN$ 为正三角形.

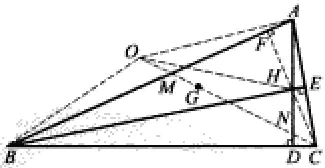


图 1.139

证明 如图 1.139，作高 CF，则点 C 为 $\triangle ABH$ 的垂心，设 $\triangle ABH$ 的外心为 O，又 G 为 $\triangle ABH$ 的重心，所以 O，G，C 三点共线（欧拉线），由 $\angle B = 30°$，则 $\angle BAH = 60°$，所以

$$\angle BOH = 2\angle BAH = 120°$$

又 $\angle BCH = 90° - \angle B = 60°$

所以 $\angle BOH + \angle BCH = 180°$

所以 O，B，C，H 四点共圆. 此时

$$\angle OCB = \angle OHB = \frac{1}{2}(180° - \angle BOH) = 30°$$

所以 $\angle ANM = \angle CND = 90° - \angle OCB = 60°$

故 $\triangle AMN$ 为正三角形.

说明 在本题的证明中，通过作出 $\triangle ABH$ 的外心后，再利用欧拉线使问题顺利获解.

例 1.39 （2004 年亚太地区数学奥林匹克试题）设 O，H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，证明：$\triangle AOH$，$\triangle BOH$，$\triangle COH$ 中有一个面积等于另外两个面积之和.

证明 如图 1.140，由欧拉线知：$\triangle ABC$ 的重心 G 在欧拉线 OH 上，亦即 OH 是过 $\triangle ABC$ 的重心 G 的一条直线，由三角形重心定理的推论知：顶点 A，B，C 中，有一个顶点到直线 OH 的距离等于另外两个顶点到直线 OH 的距离之和，又 OH 是这三个 $\triangle AOH$，$\triangle BOH$，$\triangle COH$ 的公共底边，因此，可知 $\triangle AOH$，$\triangle BOH$，$\triangle COH$ 中有一个面积等于另外两个面积之和.

定理5 有关字母同前述三角形的五心定理所设，则有公式：

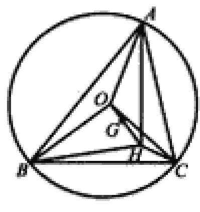


图 1.140

(1) $OA = OB = OC = R$.

(2) $HA = 2R|\cos A|, HB = 2R|\cos B|, HC = 2R|\cos C|$.

(3) $IA = 4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{p-a}{\cos\dfrac{A}{2}}$，…，等三式.

(4) $I_aA = 4R\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{r_a}{\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{p}{\cos\dfrac{A}{2}}$，…，等三式.

(5) $GA = \dfrac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$，…，等三式.

事实上，在前面记述三角形的五心定理时已证明过.

由欧拉线定理可知：三角形的外心、重心、垂心在一条直线上，那么三角形的内心及三个旁心将有怎样的位置关系呢？

这就是下面的：

定理6 $\triangle ABC$ 内接于圆 O，自点 A 作圆 O 的切线 l，又以 A 为圆心、AC 为半径作圆，圆 A 交直线 AB 于点 E_1,E_2，交直线 l 于点 F_1,F_2，则四边形 $E_1F_1E_2F_2$ 四边形的四条边所在直线分别通过 $\triangle ABC$ 的内心及三个旁心.

证明 如图 1.141，不妨设 $AB > AC$.

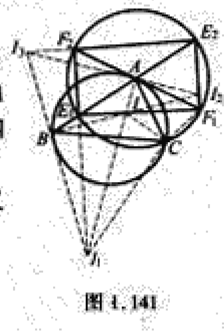


图 1.141

(1) 设 $\angle BAC$ 的平分线交 E_1F_1 于点 I. 因为 $AE_1 = AC$，所以，点 C,E_1 关于直线 AI 对称. 又 E_1,C,F_1 在圆 A 上，则 $\angle ACI = \angle AE_1I = \angle AF_1I$. 因此，$A,I,C,F_1$ 四点共圆.

因为 AF_1 为圆 O 的切线，所以，$\angle CAF_1 = \angle ABC$，又 $AE_1 = AF_1$，则

$$\angle ACI = \angle AE_1F_1 = \frac{180^\circ - \angle E_1AF_1}{2} = \frac{180^\circ - (\angle A + \angle B)}{2} = \frac{\angle C}{2}$$

因此，I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

(2) 据条件知，四边形 $E_1F_1E_2F_2$ 为矩形.

设角平分线 AI 交直线 F_2E_1 于点 I_1，联结 CI.

由(1)知，点 C,E_1 关于直线 AI 对称，故

$$\angle ICI_1=\angle IE_1I_1=90^\circ$$

所以，CI_1 为 $\angle ACB$ 的外角平分线.

因此，I_1 为边 BC 外的旁心.

(3) 设 $\angle BAC$ 的外角平分线交直线 E_2F_1 于点 I_2. 因为 $\angle IAI_2=90^\circ=\angle IF_1I_2$，所以，$A,I,F_1,I_2$ 四点共圆，故

$$\angle F_1II_2=\angle F_1AI_2=90^\circ-\angle IAF_1=\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2}-(\frac{\angle A}{2}+\angle B)=$$

$$\frac{\angle C-\angle B}{2}=\angle AE_1I-\angle ABI=\angle E_1IB$$

从而，B,I,I_2 三点共线，因此，I_2 为边 AC 外的旁心.

(4) 设 $\angle BAC$ 的外角平分线交直线 E_2F_2 于点 I_3，联结 I_3B,I_3I_1.

因为 $\angle I_3F_2I_1=90^\circ=\angle I_3AI_1$，所以，$I_3,F_2,A,I_1$ 四点共圆，故

$$\angle I_3I_1F_2=\angle I_3AF_2=\angle I_2AF_1=\angle I_2IF_1=\angle BIE_1=\angle BI_1E_1$$

从而，I_3,B,I_1 三点共线，即 BI_3 是 $\angle ABC$ 的外角平分线.

因此，I_3 为边 AB 外的旁心.

这说明三角形的内心及三个旁心分别在一个矩形的四条边上.

定理 7 三角形的内心、外心、垂心与两顶点共五点共圆的充要条件是另一顶点的内角为 60°.

证明 如图 1.142，先证充分性：即证若有一内角为 60°，不妨设 $\angle A=60^\circ$，则 $\triangle ABC$ 的外心 O，内心 I，垂心 H,B,C 五点共圆.

事实上，由三角形的重心、内心、垂心定理知

$$\angle BOC=2\angle A=120^\circ,\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A=120^\circ$$

$$\angle BHC=180^\circ-\angle A=120^\circ$$

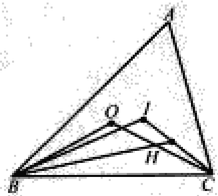


图 1.142

于是可得 B,O,I,H,C 五点共圆.

再证必要性，即证若 B,O,I,H,C 五点共圆，则 $\angle A=60^\circ$.

事实上，因为 $\angle BOC=2\angle A,\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，又 B,O,I,C 四点共圆，所以

$$2\angle A=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$$

所以 $$\angle A=60^\circ$$

综上可知结论成立.

例1.40 （江、浙、鄂三省数学奥林 乙试题）在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，O,I,H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、内心、垂心，求证：$OI=IH$.

证明 如图1.142，因为 $\angle A=60^\circ$，所以由定理7知 B,O,I,H,C 五点共圆，又由定理3知：$\angle OBI=\angle HBI$，故 $OI=IH$.（同圆中等圆周角对等弦）

说明 本例将三角形的外心、内心、垂心汇合在一起，充分运用了三角形此三心的定理，使问题获解.并且要注意一内角为 60° 的三角形的特殊性.

定理8 设 H,G,I 分别为三边两两互不相等的三角形的垂心、重心和内心，则 $\angle HIG>90^\circ$.

证明 如图1.143，不妨设 $CA>AB>BC$，过 G 作直线 $l\,/\!/\,BC$，易证 AI 位于 $\angle HAG$ 内，点 I 在直线 l 上方，在 CH 下方，于是 I 在以 GH 为直径的圆内，从而 $\angle HIG$ 为钝角或平角.

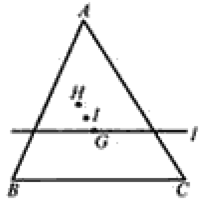


图1.143

定理9 （第4届IMO试题的推广）若 $\triangle ABC$ 的外心与内心的距离为 d，则

$$d^2=R^2-2Rr \qquad ①$$

证明 如图1.144，联结 AI 并延长交圆 O 于 D，作直径 DE，联结 BD,BE，设圆 I 切 AB 于 F，联结 IF，则 $IF=r$.

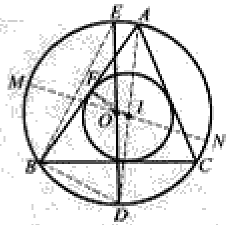


图1.144

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AFI$ 中，由 $\angle BED=\angle FAI$，知 $\triangle EBD\backsim\triangle AFI$，从而 $\dfrac{DE}{AI}=\dfrac{BD}{FI}$，即 $\dfrac{2R}{AI}=\dfrac{BD}{r}$.

由三角形内心定理4，知 $BD=ID$，所以

$$2Rr=AI\cdot BD=AI\cdot ID$$

将 OI 两端延长交圆 O 于 M,N，则由相交弦定理，得

$$AI\cdot ID=MI\cdot IN=(R+d)(R-d)=R^2-d^2$$

故
$$d^2=R^2-2Rr$$
所以
$$d=\sqrt{R(R-2r)}$$
所以
$$R\geqslant 2r \qquad ②$$

说明 公式①叫做欧拉公式，公式②叫做欧拉不等式.

定理10 如图1.145，O,I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心，P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，过 P 作 $PD\perp BC$，$PE\perp CA$，$PF\perp AB$，垂足分别为 D,E,F，若

$$AF + BD + CE = FB + DC + EA \quad (*)$$

则点 P 的轨迹为直线 OI.

式①中的线段均为有向线段，它们的正方向分别为 $A\to B$, $B\to C$ 和 $C\to A$. 例如，若 F 在线段 AB 的内部，则 AF 和 FB 的长度均为正值；若 F 在 AB 的延长线上，则 AF 的长度为正，FB 的均为负. 以下证明和讨论中涉及的线段，凡属于三角形的边所在直线的，其长度的正负号均服从这一规定.

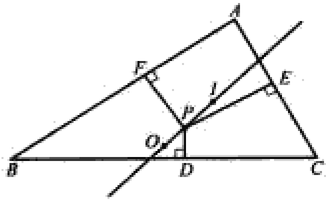


图 1.145

对于等边三角形，外心 O 和内心 I 重合，直线 OI 不确定. 下面先对不等边三角形证明这个定理，再将等边三角形作为特例另行讨论.

证明　首先证明，直线 OI 上的任意点 P 都满足式$(*)$. 为方便起见，设 $OP : OI = k$，OP 和 OI 的方向以 $O\to I$ 为正. 设 O, P, I 在三边的射影分别为 D_1, D, D_2; E_1, E, E_2 和 F_1, F, F_2，如图 1.146 所示.

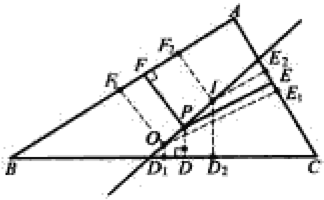


图 1.146

则由外心和内心的定理可知

$$AF_1 + BD_1 + CE_1 = F_1B + D_1C + E_1A \quad ①$$

$$AF_2 + BD_2 + CE_2 = F_2B + D_2C + E_2A \quad ②$$

从而

$$2(F_1F_2 + D_1D_2 + E_1E_2) = (AF_2 - AF_1) + (F_1B - F_2B) + (E_1A - E_2A) = 0 \quad ③$$

此外，由于 $OD_1 /\!/ PD /\!/ ID_2$, $OE_1 /\!/ PE /\!/ IE_2$, $OF_1 /\!/ PF /\!/ IF_2$，有以下比例关系

$$D_1D : D_1D_2 = E_1E : E_1E_2 = F_1F : F_1F_2 = OP : OI = k \quad ④$$

由式①,③,④可得

$$(AF + BD + CE) - (FB + DC + EA) =$$
$$(AF_1 + F_1F + BD_1 + D_1D + CE_1 + E_1E) -$$
$$(F_1B - F_1F + D_1C - D_1D + E_1A - E_1E) =$$
$$(AF_1 + BD_1 + CE_1) - (F_1B + D_1C + E_1A) + 2(F_1F + D_1D ++ E_1E) =$$
$$2k(F_1F + D_1D ++ E_1E) = 0$$

因此式$(*)$成立.

图 1.146 中，外心 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，P 为线段 OI 内部的点，这并非必要.

对于其他情况，例如外心在三角形的外部以及 P 在 OI 或 OI 延长线上的情况，包括 P 在三角形的外部的情况，只要统一执行上述关于线段长度的符号规定，证明过程都是相同的，这里不一一论述. 以下证明中的类似情况也不再说明.

其次证明，若 P 不是直线上的点，则式（*）一定不成立.（证明略）

由此可知，直线 OI 就是点 P 的轨迹. 证毕.

对于等边三角形，其外心 O 和内心 I 重合，直线 OI 不确定，则点 P 的轨迹为过 $O(I)$ 的所有直线，即三角形所在的整个平面. 这是本问题的一个特例，其结论可以简化为：等边三角形所在平面内的任意点在三边或其延长线上的射影将三边分成六段，其中相互间隔的三个有向线段的长度的代数和等于另外三个有向线段的长度的代数和.

定理 11　设 O,I 是三边不全相等的 $\triangle ABC$ 的外心和内心，R,r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆半径，点 P 到直线 OI 上的距离为 $d(d\geqslant 0)$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，点 P 在边 BC,CA,AB 正射影分别为 D,E,F. 记 $AF+BD+CE=p_1$，$FB+DC+EA=p_2$，则

$$|p_1-p_2|=\frac{2\sqrt{R^2-2Rr}}{R}d \qquad (*)$$

（其中线段 AF,BD,CE,FB,DC,EA 长度均遵从定理 1 中的约定）.

证明　如图 1.147，设直线 PD 与直线 OI 交于点 P'，过点 P' 作 $P'E'\perp AC$，$P'F'\perp AB$，垂足分别为 E',F'；作 $PM\perp P'E'$，$PN\perp P'F'$，$PH\perp OI$，垂足分别为 M,N,H；作 $IK\perp BC$，$OL\perp BC$，$IS\perp OL$，垂足分别为 K,L,S. 并设

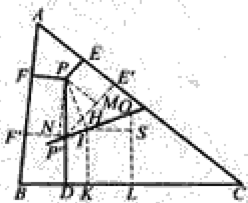


图 1.147

$$BC=a,CA=b,AB=c,p=\frac{a+b+c}{2}$$

易证
$$p_1+p_2=2p$$

由定理 1 知

$$AF'+BD+CE'=p \qquad ①$$

而

$$AF+BD+CE=p_1 \qquad ②$$

式 ① 和式 ② 左右两边相减，得

$$FF'-EE'=p-p_1=\frac{p_2-p_1}{2} \qquad ③$$

注意到
$$\angle PP'E'=\angle C,\angle PP'F'=\angle B$$

所以
$$FF' = PN = PI\sin\angle PP'F' = PI\sin B$$
$$EE' = PM = PI\sin\angle PP'E' = PI\sin C$$

再结合式③,得
$$|p_1 - p_2| = 2|FF' - EE'| = 2|PI||\sin B - \sin C| \quad ④$$

由三角形欧拉公式知
$$|OI| = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

而
$$|IS| = |KL| = |BL - BK| = \left|\frac{a}{2} - (p - d)\right| = \frac{|b - c|}{2} = R|\sin B - \sin C|$$

所以
$$\sin\angle IOS = \frac{|IS|}{|OI|} = \frac{R|\sin B - \sin C|}{\sqrt{R^2 - 2Rr}}$$

显然 $\angle PIH = \angle IOS$,故
$$|PI| = \frac{d}{\sin\angle PIH} = \frac{d}{\sin\angle IOS} = \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R|\sin B - \sin C|}d \quad ⑤$$

将式⑤代入式④,即得

$$|p_1 - p_2| = \frac{2\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R}d$$

说明 由式②知 $p_1 = p_2$,当且仅当 $d = 0$,此时即为定理10中描述的定理.

定理12 若 I, I_1 分别为 $\triangle ABC$ 的内心、$\angle A$ 内心的旁心,角平分线 AI 交 BC 于点 D,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 A_1,则 $\frac{AI}{ID} = \frac{I_1A_1}{A_1D}, \frac{AI}{AD} = \frac{I_1A_1}{I_1D}$. 又若 P 是 AA_1 延长线上的一点,且满足 $\frac{AI}{ID} = \frac{PA_1}{A_1D}$ 或者 $\frac{AI}{AD} = \frac{PA_1}{PD}$,则 P 为边 BC 外的旁心.

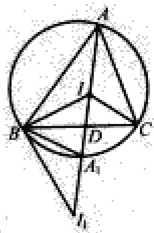


图1.148

证明 如图1.148,由 $\triangle ACD \backsim \triangle BA_1D$ 得 $\frac{AC}{DC} = \frac{BA_1}{A_1D}$,又 $A_1B = A_1I = A_1I_1$, $\frac{AI}{AD} = \frac{AC}{CD}$,则 $\frac{AI}{ID} = \frac{I_1A_1}{A_1D}$. 据合分比得
$$\frac{AI}{AD} = \frac{I_1A_1}{I_1D}$$

至于后一命题,只须用同一方法便知.

这是一个很有用的定理,利用它可以给某些平面几何问题赋予新的解法.

例1.41 (2008年CMO试题)设锐角 $\triangle ABC$ 的三边长互不相等,O 为其外

心，点 A_0 在线段 AO 的延长线上，使得 $\angle BA_0A = \angle CA_0A$，过点 A_0 分别作 $A_0A_1 \perp AC$，$A_0A_2 \perp AB$，垂足分别为 A_1，A_2，作 $AH_A \perp BC$，垂足为 H_A. 记 $\triangle H_AA_1A_2$ 的外接圆半径为 R_A，类似地可得 R_B，R_C. 求证：$\dfrac{1}{R_A}+\dfrac{1}{R_B}+\dfrac{1}{R_C}=\dfrac{2}{R}$.（其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径）

证明　首先，易知 A_0，B，O，C 四点共圆.

事实上，如图 1.149，作 $\triangle A_0BC$ 的外接圆，设它与直线 AO 的交点 P 异于点 O. 据等角对等弦得 $PB = PC$. 又 $OB = OC$，故 B，C 关于直线 PO（即 AO）对称，得 $AB = AC$，矛盾.

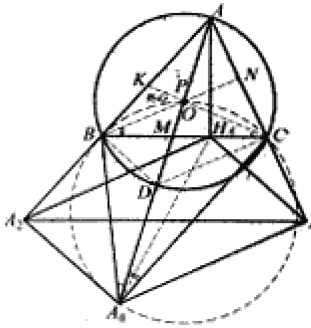


图 1.149

设 $AA_0 \cap$ 圆 $O = D$. 由 $\angle AA_2A_0 = \angle AA_1A_0 = 90^\circ$，得 A，A_2，A_0，A_1 四点共圆.

又由 $BD \parallel A_2A_0$，$CD \parallel A_1A_0$，得

$$\frac{AB}{AA_2}=\frac{AD}{AA_0}=\frac{AC}{AA_1}$$

所以 $$BC \parallel A_2A_1$$

于是 $$AH_A \perp A_1A_2$$

由 $\mathrm{Rt}\triangle A_2AA_0 \backsim \mathrm{Rt}\triangle BAD \backsim \mathrm{Rt}\triangle H_AAC$，得

$$\frac{A_2A}{A_0A}=\frac{H_AA}{CA},\angle A_2AA_0=\angle H_AAC$$

于是 $$\angle A_2AH_A=\angle A_0AC$$

故 $$\triangle A_2AH_A \backsim \triangle A_0AC,\angle AA_2H_A=\angle AA_0C=\angle OBC=90^\circ-\angle A$$

所以 $$A_2H_A \perp AA_1$$

因此，H_A 是 $\triangle H_AA_1A_2$ 的垂心.

从而，$\triangle H_AA_1A_2$ 的外接圆半径与 $\triangle AA_1A_2$ 的外接圆半径相等，都为 R_A（这里用到三角形的一个定理：若非 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的垂心为 H，则 $\triangle HAB$，$\triangle HBC$，$\triangle HCA$ 与 $\triangle ABC$ 具有相等的外接圆半径）.

下面考虑 $\triangle A_0BC$. 设角平分线 A_0O 交 BC 于点 M. 因点 D 在角平分线 A_0O 上，且 $OD = OB = OC = R$，则 D 为 $\triangle A_0BC$ 的内心.

又由 $BA \perp BD$，$CA \perp CD$ 知 A 是 $\triangle A_0BC$ 的旁心. 于是，由定理得

$$\frac{AO}{AM}=\frac{A_0D}{A_0M}=\frac{AO+A_0D}{AM+A_0M}$$

即 $$\frac{R}{AM}=\frac{2R_A-R}{2R_A}$$

故 $$\frac{R}{AM-R}=\frac{2R_A-R}{R}=\frac{R+(2R_A-R)}{(AM-R)+R}=\frac{2R_A}{AM}$$

从而 $$\frac{R}{R_A}=\frac{2(AM-R)}{AM}=2\cdot\frac{OM}{AM}$$

据对称性，若设 $BO\cap AC=N, CO\cap AB=K$，则

$$\frac{R}{R_B}=2\cdot\frac{ON}{BN},\frac{R}{R_C}=2\cdot\frac{OK}{CK}$$

注意在 $\triangle ABC$ 中 $\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OK}{CK}=1$，则

$$\frac{R}{R_A}+\frac{R}{R_B}+\frac{R}{R_C}=2$$

即 $$\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C}=\frac{2}{R}$$

定理 13 锐角 $\triangle ABC$ 中，外心 O，重心 G，垂心 H 到三边的距离之和分别记为 $d_{外}, d_{重}, d_{垂}$，则 $1\cdot d_{垂}+2\cdot d_{外}=3\cdot d_{重}$.

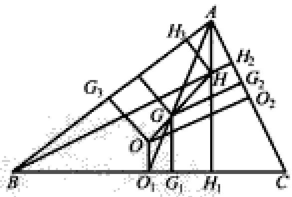


图 1.150

证明 如图 1.150，易知

$$d_{外}=R(\cos A+\cos B+\cos C)$$

则 $$2d_{外}=2R(\cos A+\cos B+\cos C)$$

因为 $$AH_1=AB\sin B=2R\sin B\sin C$$

同理 $$AH_2=2R\sin C\sin A, AH_3=2R\sin A\sin B$$

所以 $$3d_{重}=2R(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$$

设 AH 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 H'，则

$$HH_1=H_1H'=BH\cos\angle BHH_1=BH\cos C=2R\cos B\cos C$$

同理 $$CH=2R\cos C\cos A, AH=2R\cos A\cos B$$

所以 $$d_{垂}=2R(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$

于是由 $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-\sin A\sin B-$
$\sin B\sin C-\sin C\sin A=\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)=$
$-(\cos C+\cos B+\cos A)$

故得证.

定理 14 三角形的三条高的垂足，三边的中点，以及垂心与顶点的三条连线的中点，这九点共圆(此圆称为九点圆). 三角形的外心与垂心连线的中点是九点圆的圆心.

证明 如图 1.151，AD, BE, CF 分别为 $\triangle ABC$ 的三条高，垂心为 H. N, S,

P 分别为三边中点，G,T,M 分别为 AH,BH,CH 中点.

因为 $PS \underline{\parallel} TM \underline{\parallel} \frac{1}{2}BC$，且 $PT \underline{\parallel} SM \underline{\parallel} \frac{1}{2}AH$，又 $AD \perp BC$，所以 $PTMS$ 为矩形.

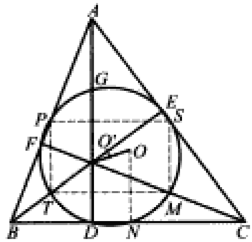


图 1.151

同理 $TNSG$ 为矩形.

所以 TS,NG,PM 是同一个圆的三条直径，又 $\angle GDN = 90°$，所以 D 在此圆上.

同理 E,F 也在此圆上.

故 D,E,F,G,T,M,N,S,P 九点共圆.

由定理 2 易知 $GH \underline{\parallel} ON$，所以 $GHNO$ 为平行四边形.

又 GN 为直径，所以 GN 与 OH 相交于点 O'，即为九点圆的圆心.

由以上证明过程，我们不难知道：

(1) $\triangle ABC$ 的九点圆实际上就是它的关于垂心的垂足三角形的外接圆，也是三角形中位线构成的三角形的外接圆. 由于 $\triangle ABC$ 是它的旁心 $\triangle I_aI_bI_c$ 的垂足三角形（这已在前面的垂足三角形定理中证明过），因此，$\triangle I_aI_bI_c$ 的九点圆就是 $\triangle ABC$ 的外接圆.

(2) $\triangle ABC$ 的九点圆圆心在它的欧拉线上，圆心为垂心与外心连线的中点，半径长等于 $\triangle ABC$ 的外接圆半径的一半.

例 1.42 （2007 年全国高中数学联赛加试第一题）在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$，AD 是边 BC 上的高，P 是线段 AD 内一点，过 P 作 $PE \perp AC$，垂足为 E，作 $PF \perp AB$，垂足为 F. O_1,O_2 分别是 $\triangle BDF,\triangle CDE$ 的外心. 求证：O_1,O_2,E,F 四点共圆的充要条件为 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

证明 充分性：如图 1.152，若 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心，由于 $\triangle BDF,\triangle CDE$ 的外心分别是 BP,CP 的中点，因此，$\triangle ABC$ 的九点圆过 O_1,O_2,E,F，即 O_1,O_2,E,F 四点共圆.

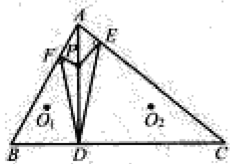


图 1.152

必要性：若 O_1,O_2,E,F 四点共圆，则 $\angle O_1O_2E + \angle EFO_1 = 180°$.

因为 O_1,O_2 分别是 BP,CP 的中点，$O_1O_2 \parallel BC$，且

$$\angle AFE + \angle APE = \angle BCA$$

所以

$$\angle O_1O_2E = \angle O_1O_2P + \angle PO_2E = \angle PCB + 2\angle PCE = \angle BCA + \angle PCE$$

$$\angle EFO_1 = 180° - \angle AFE - \angle BFO_1 = 180° - \angle BCA - \angle PBF$$

故 $$\angle FBP = \angle ECP$$

由于 $\triangle BPF \backsim \triangle CPE$，则

$$\frac{PB}{CP} = \frac{PF}{PE} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

因为 $AB < AC$，所以$\frac{\cos B}{\cos C} \neq 1$.

故点 P 在阿波罗尼斯(Apollonius)圆上.

注意到 AD 在 BC 的上方与该圆恰有一个交点，且 $\triangle ABC$ 的垂心 H 满足

$$\frac{BH}{CH} = \frac{\sin \angle HCD}{\sin \angle HBD} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

故 $P = H$，即 P 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

定理 15 若 $\triangle ABC$ 的外心、内心、重心和垂心分别为 O, I, G, H，则

$$6OI^2 + 3IH^2 = 2OH^2 + 9IG^2 \quad ①$$

$$2OI^2 + IH^2 = 6OG^2 + 3IG^2 \quad ②$$

$$4OI^2 + 2IH^2 = 3GH^2 + 6IG^2 \quad ③$$

证明 由于点 O, G, H 在欧拉线上，且 $OG = \frac{1}{2}GH$，所以

$$OG = \frac{1}{3}OH, GH = \frac{2}{3}OH$$

在 $\triangle IOH$ 中，利用斯特华尔特定理有

$$OI^2 \cdot GH + IH^2 \cdot OG - IG^2 \cdot OH = OH \cdot OG \cdot GH$$

所以 $$OI^2 \cdot \frac{2}{3}OH + IH^2 \cdot \frac{1}{3}OH - IG^2 \cdot OH = OH \cdot \frac{1}{9}OH^2$$

所以

$$6OI^2 + 3IH^2 = 2OH^2 + 9IG^2 \quad ④$$

因为 $$OH = 3OG, OH = \frac{3}{2}GH$$

将①,②,③代入式④，得

$$2OI^2 + IH^2 = 6OG^2 + 3IG^2$$

$$4OI^2 + 2IH^2 = 3GH^2 + 6IG^2$$

定理 16 设 P 为 $\triangle ABC$ 平面内的点，AP, BP, CP 所在直线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A', B', C'，那么

(1) 若 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，则对锐角三角形，有

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'} \quad ①$$

对非锐角三角形(不妨设 $\angle A \geqslant 90°$,下同),有

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC} - S_{\triangle AB'C} - S_{\triangle ABC'} \quad ②$$

(2) 若 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心,则对锐角三角形,有式 ① 成立;对非锐角三角形有式 ② 成立.

(3) 若 P 为 $\triangle ABC$ 的重心,则有

$$S_{\triangle ABC} \leqslant S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'} \quad ③$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

(4) 若 P 为 $\triangle ABC$ 的内心,则有式 ③ 成立,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

证明 (1) 如图 1.153,P 为 $\triangle ABC$ 的外心,设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,联结 AH,BH,CH,则由 $AH \perp BC$,$B'C \perp BC$ 知 $AH \parallel B'C$,同理 $CH \parallel B'A$,故四边形 $AB'CH$ 为平行四边形,于是

$$S_{\triangle AHC} = S_{\triangle AB'C}$$

同理

$$S_{\triangle AHB} = S_{\triangle AC'B}, S_{\triangle BHC} = S_{\triangle BA'C}$$

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形(图 1.153(a)),则

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AHB} + S_{\triangle BHC} + S_{\triangle CHA} = S_{\triangle ABC'} + S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C}$$

故式 ① 成立.

若 $\triangle ABC$ 为非锐角三角形(图 1.153(b)),则

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BHC} - S_{\triangle CHA} - S_{\triangle AHB} = S_{\triangle A'BC} - S_{\triangle AB'C} - S_{\triangle ABC'}$$

故式 ② 成立.

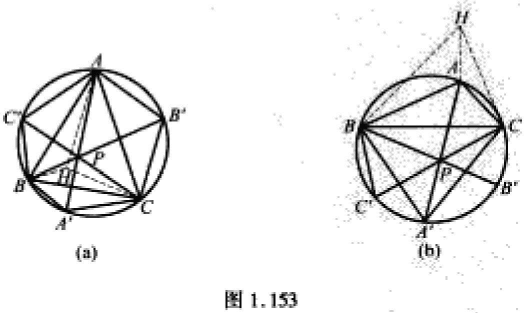


图 1.153

(2) 如图 1.154,P 为 $\triangle ABC$ 的垂心,设 O 为外心,联结 AO 并延长交圆 O 于 A_1,联结 A_1A',则 $A_1A' \perp AA'$,又 $AA' \perp BC$,故 $A_1A' \parallel BC$,得 $S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle A'BC}$,同理

$$S_{\triangle B_1AC}=S_{\triangle B'AC},S_{\triangle C_1AB}=S_{\triangle C'AB}$$

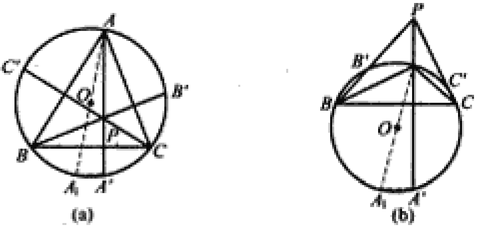


图 1.154

所以，当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形（图 1.154(a)）时，可得

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle AB_1C}+S_{\triangle ABC_1}=S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle ABC'}$$

即式 ① 成立.

同理，当 $\triangle ABC$ 为非锐角三角形（图 1.154(b)）时，式 ② 成立.

(3) 如图 1.155，P 为 $\triangle ABC$ 的重心，O 为外心，AO 交圆 O 于 A_1，$AH\perp BC$，AH 交圆 O 于 A_2，AA'，AA_1 分别交 BC 于 D，E. 当 $\angle A\geqslant 90°$ 时，易见 $AD\leqslant A'D$，从而 $S_{\triangle A_1BC}\leqslant S_{\triangle A'BC}$，式 ③ 显然成立. 下面对锐角 $\triangle ABC$，证明式 ③ 成立.

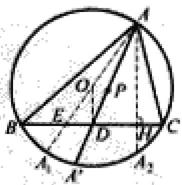


图 1.155

联结 OD，因 D 为 BC 的中点，则 $OD\perp BC$，又 $AH\perp BC$，故 $OD/\!/AH$，从而点 D 在点 E 与 H 之间，即中线延长线与外接圆的交点 A' 在点 A_1 与 A_2 点之间，有

$$S_{\triangle A'BC}\geqslant S_{\triangle A_1BC}$$

同理 $$S_{\triangle AB'C}\geqslant S_{\triangle AB_1C},S_{\triangle ABC'}\geqslant S_{\triangle ABC_1}$$

所以 $$S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle ABC'}\geqslant S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle AB_1C}+S_{\triangle ABC_1}=S_{\triangle ABC}$$

其中，等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

(4) 如图 1.156，P 为 $\triangle ABC$ 的内心，则 $\angle 1=\angle 2$，$\overset{\frown}{A'B}=\overset{\frown}{A'C}$，$A'$ 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，而弧 $\overset{\frown}{BA'C}$ 上任一点到弦 BC 的距离不大于弓形的高. 所以，在联结点 B，点 C 和 $\overset{\frown}{BA'C}$ 上任一点这三点所确定的三角形中，以 $\triangle A'BC$ 的面积最大，由 (3) 即知

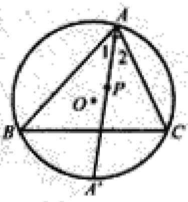


图 1.156

$$S_{\triangle ABC}\leqslant S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle ABC'}$$

其中，等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

说明 由以上证明过程不难得到：若点 P 为锐角 $\triangle ABC$ 内一点，AP，BP，CP 的延长线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 A_1，A_2，A_3，当点 P 分别为外心、垂心、重心、内心时六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的面积分别记为 $S_外$，$S_垂$，$S_重$，$S_内$，则

$$S_外 = S_垂 = 2S_{\triangle ABC} \leqslant S_重 \leqslant S_内$$

例 1.43 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，延长 BC，CA，AB 三边上的高分别交外接圆于 A'，B'，C'（图 1.154(a)），则有

$$AA'\sin A + BB'\sin B + CC'\sin C = 8R\sin A\sin B\sin C$$

证明 据定理 16，可知

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'}$$

即 $4S_{\triangle ABC} = (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A'BC}) + (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AB'C}) + (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABC'})$

$$4 \cdot 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{1}{2}BC \cdot AA' + \frac{1}{2}CA \cdot BB' + \frac{1}{2}AB \cdot CC'$$

所以 $8R\sin A\sin B\sin C = AA'\sin A + BB'\sin B + CC'\sin C$

例 1.44 （1991 年中国国家数学奥林匹克集训队测试题）已知锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 O，作 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高，CA 边上的中线和 $\angle C$ 的平分线并延长，分别交圆 O 于 A'，B'，C'，求证：$S_{\triangle ABC} \leqslant S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'}$.

证明 如图 1.157，设 $\triangle ABC$ 中，边 CA，AB 上的高的延长线分别交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 B''，C''，则据定理 16 有

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB''C} + S_{\triangle ABC''}$$

又由定理 16 中(3)、(4) 的证明可知

$$S_{\triangle AB''C} \leqslant S_{\triangle AB'C}, S_{\triangle ABC''} \leqslant S_{\triangle ABC'}$$

所以 $S_{\triangle ABC} \leqslant S_{\triangle A'BC} + S_{\triangle AB'C} + S_{\triangle ABC'}$

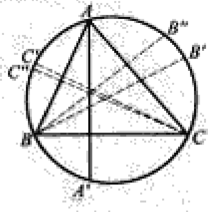


图 1.157

其中，等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

例 1.45 （1994 年保加利亚竞赛题）$\triangle ABC$ 的外接圆为圆 O，$\angle C = 60°$，N 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，H 是垂心，求证：$CN \perp OH$.

分析 如图 1.158，因为 $\angle C = 60°$，所以 $\angle CAH' = 30°$，所以 $\triangle OCH'$ 为正三角形.

易证 $CH = CH'$，所以 $OC = ON = CH$，如能证出 $HN = OC$，则四边形 $OCHN$ 为菱形，即有 $CN \perp OH$.

证明 如图 1.158，延长 AH 交 BC 于 P，交圆 O 于 H'，联结 CH'，OH'，OC，ON.

由 $\angle C = 60°$ 知 $\angle CAH' = 30°$.

所以 $\triangle OCH'$ 为正三角形. 又因为 H 为垂心, 所以

$$\angle H'CP = \angle HCP$$

则有

$$CH = CH' = OC$$

又 N 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点, 所以 $ON \perp AB$, 而 $CH \perp AB$, 所以 $CH \mathrel{\underline{\parallel}} ON$, 所以 $OCHN$ 为平行四边形.

又 $OC = CH$, 知 $OCHN$ 是菱形, 从而 $CN \perp OH$.

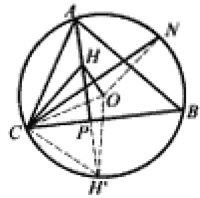


图 1.158

例 1.46　设 $\triangle ABC$ 不是直角三角形, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, H 为垂心, 直线 OH 交 AC 于 K, 交 AB 于 L, 已知 $OK = HL$. 求 $\angle A$ 的值.

解　如图 1.159, 作 $ON \perp BC$ 于 N, 则 N 为 BC 中点. 联结 OA, OC, ON, AN 与 OH 的交点为 G, 由欧拉定理知 OGH 为欧拉线. 且 $HG = 2GO$, $ON \parallel AH$, 故 $AH = 2NO$. 又 $\angle BAD = \angle OAC$, 由已知 $OH = HL$, $S_{\triangle ALH} = S_{\triangle AOK}$ (等底 $LH = OK$, 等高点 A 到 LK 的距离) $\Rightarrow$

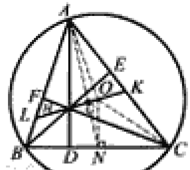


图 1.159

$$AL \cdot AH = AO \cdot AK \quad ①$$

由 $S_{\triangle ALO} = S_{\triangle AHK}$, 得

$$AL \cdot AO = AO \cdot AK \quad ②$$

① × ② 式, 得 $AL = AK$, 所以 $AH = AO = OC$, 即

$$OC = 2NO$$

故 $\angle CON = 60°$. 于是 $\angle A = 60°$.

例 1.47　锐角 $\triangle ABC$ 中, H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 过点 H 作直线 l, 作 l 关于 $\triangle ABC$ 的三边的对称直线. 求证: 这三条直线共点.

证明　如图 1.160, 设垂心 H 关于边 BC, CA, AB 的对称点分别为 A_1, B_1, C_1 均在 $\triangle ABC$ 的外接圆周上. 当 l 过某个顶点时, 结论显然.

当 l 平行于 $\triangle ABC$ 的一边时, 不妨设 $BC \parallel l$. 设 $l \cap AB = M$, $l \cap AC = N$. l 关于 BC 的对称直线平行 BC 且过点 A_1, l 关于 AB 的对称直线为 C_1M, 两对称直线相交于 T. 易知, $\angle AC_1T = \angle AHM = 90°$, $\angle AA_1T = 90°$, 故 A, C_1, T, A_1 四点共圆, 即点 T 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

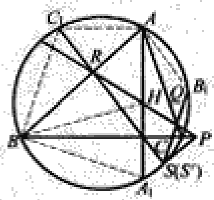


图 1.160

设 l 关于 AC 的对称直线为 B_1N, B_1N 与 l 关于 BC 的对称直线交于 T', 也在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 故 T 与 T' 重合, 即题设中三条直线共点.

当 l 与三边所在直线相交且不过 $\triangle ABC$ 的任何顶点，其交点分别为 P,Q,R，如图 1.160 所示，l 关于 AB 的对称直线为 C_1R，关于 AC 的对称直线为 B_1Q，且 $C_1R\cap B_1Q=S$。因为

$$\angle AC_1S+\angle AB_1S=\angle AHR+\angle AHQ=\pi$$

所以 A,C_1,S,B_1 四点共圆，即 S 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 又 l 关于 BC 的对称直线为 A_1P，且 $C_1R\cap A_1P=S'$. 因为

$$\angle BA_1S'+\angle BC_1S=\angle BHR+\angle BHP=\pi$$

所以 B,A_1,S',C_1 四点共圆，即 S' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 因此，S 与 S' 两点重合，即题设中三条直线共点.

说明 对钝角三角形和直角三角形上述结论仍成立.

例 1.48 （第 41 届 IMO 预选题）设 O,H 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心和垂心. 证明：存在 D,E,F 分别在 BC,CA,AB 上，使得 $OD+DH=OE+EH=OF+FH$，且此时三线交于一点.

证明 如图 1.161，设 H 关于边 BC,CA,AB 的对称点分别为 A',B',C'，则 A',B',C' 均在外接圆圆 O 上. 设直线 OA',OB',OC' 与 BC,CA,AB 的交点记为 D,E,F，下证 D,E,F 满足要求.

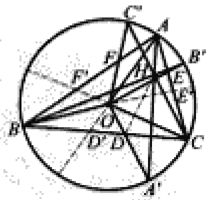


图 1.161

设直线 AO,BO,CO 与 BC,CA,AB 交点为 D',E',F'.

联结 DH，由于 $DA'=DH$，有

$$OD+DH=OD+DA'=R$$

（R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径）. 同理

$$OE+EH=OF+FH=R$$

因为 $$\angle BAO=\frac{\pi}{2}-\angle ACB=\angle CAA'$$

所以 $$\angle BOD'=\angle COD$$

又 $$OB=OC,\angle OBD'=\angle OCD$$

所以 $$\triangle OBD'\cong\triangle OCD$$

所以 $BD'=CD$. 同理 $CE'=AE,AF'=BF$.

由塞瓦定理，知 $1=\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}$，而

$$\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}=\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}$$

故 $$\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$$

由塞瓦定理的逆定理,知 AD,BE,CF 共点.所以,得到的点 D,E,F 满足要求.

说明 易知 $\angle DOC=\pi-2\angle C,\angle DOB=\pi-2\angle B$,从而 $\frac{BD}{DC}=\frac{\sin 2B}{\sin 2C}$,同理

$$\frac{CE}{EA}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A},\frac{AF}{FB}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B}$$

有 $$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

故 AD,BE,CF 三线共点.利用三角形知识亦可以简捷地证明.

练习 6

1. 如图 1.162,正方形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 交于 O,E 在 OA 上,F 在 OB 上,$EF\parallel AB$,DE 的延长线交 AF 于 H.求证:$DH\perp AF$.

2. (2002 ~ 2003 年英国奥林匹克试题)如图 1.163,已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为圆 S,且满足 $AB<AC$.过点 A 的高线交圆 S 于点 P,X 为线段 AC 上的点,且 BX 交圆 S 于 Q.

证明:$BX=CX$ 的充分必要条件是 PQ 为圆 S 的直径.

3. (2002 ~ 2003 年芬兰初中数学竞赛试题)如图 1.164,设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,射线 AI,BI,CI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 D,E,F.证明:$AD\perp EF$.

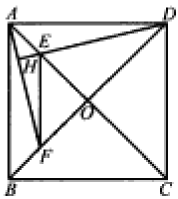


图 1.162

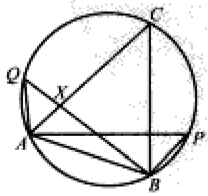


图 1.163

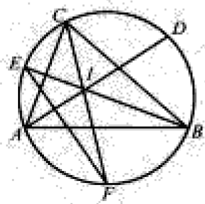


图 1.164

第2章　三角形五心的坐标表示、向量形式及应用

在第1章里，我们主要是以"形"的方面（亦即以几何方面）介绍了三角形的五心（即外心、重心、垂心、内心和旁心）的概念、性质以及应用．在这一章里，我们将以"数形结合"的角度（向量的角度）和代数的角度（亦即以解析的形式）来研究三角形五心所具备的特点及其应用．

第1节　三角形五心的坐标表示及应用

在这一节里，我们主要讨论用三角形三顶点的坐标以及三角形中元素（边与角的三角函数）来表示三角形五心，然后举例说明其应用．

定理1　设$\triangle ABC$的顶点坐标分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，若点E，F分别内分或外分AC，AB，且$\frac{AF}{FB}=\lambda$，$\frac{AE}{EC}=\mu$，BE，CF交于点P，则点P的坐标为

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\mu x_2+\lambda x_3}{1+\mu+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\mu y_2+\lambda y_3}{1+\mu+\lambda}\end{cases}$$

证明　如图2.1，联结AP并延长交BC于D，由塞瓦定理得

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

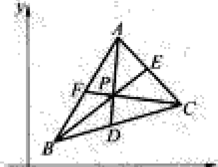


图2.1

即$\frac{BD}{DC}=\frac{\lambda}{\mu}$，由于直线$BE$截$\triangle ACD$的三边于$B$，$P$，$E$和梅涅劳斯定理得

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DP}{PA}=1$$

所以

$$\frac{AP}{PD}=\lambda+\mu$$

又由定比分点坐标公式，得

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{\mu x_2 + \lambda x_3}{\lambda + \mu} \\ y_D = \dfrac{\mu y_2 + \lambda y_3}{\lambda + \mu} \end{cases}$$

所以
$$x_P = \frac{x_1 + (\lambda + \mu)x_D}{1 + \lambda + \mu} = \frac{x_1 + \mu x_2 + \lambda x_3}{1 + \mu + \lambda}$$

同理 $y_P = \dfrac{y_1 + \mu y_2 + \lambda y_3}{1 + \mu + \lambda}$. 于是定理得证.

由定理 1,适当地选取参数 λ, μ 的值,有:

推论 (1) 取 $\lambda = \mu = 1$,则得 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 $G(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$.

(2) 取 $\lambda = \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{c}{a}$, $\mu = \dfrac{AF}{FB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$,则得 $\triangle ABC$ 的内心坐标为

$$I(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c})$$

(3) 取 $\lambda = -\dfrac{|AE|}{|EC|} = -\dfrac{|AB|}{|BC|} = -\dfrac{c}{a}$, $\mu = -\dfrac{b}{a}$,则得 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁切圆圆心坐标为

$$I_a(\frac{-ax_1 + bx_2 + cx_3}{-a + b + c}, \frac{-ay_1 + by_2 + cy_3}{-a + b + c})$$

同理
$$I_b(\frac{ax_1 - bx_2 + cx_3}{a - b + c}, \frac{ay_1 - by_2 + cy_3}{a - b + c})$$
$$I_c(\frac{ax_1 + bx_2 - cx_3}{a + b - c}, \frac{ay_1 + by_2 - cy_3}{a + b - c})$$

(4) 对于非直角 $\triangle ABC$,取 $\lambda = \dfrac{AB\cos A}{BC\cos C} = \dfrac{c\cos A}{a\cos C} = \dfrac{\tan C}{\tan A}$, $\mu = \dfrac{\tan B}{\tan A}$,则得 $\triangle ABC$ 的垂心坐标为

$$H(\frac{\tan A \cdot x_1 + \tan B \cdot x_2 + \tan C \cdot x_3}{\tan A + \tan B + \tan C}, \frac{\tan A \cdot y_1 + \tan B \cdot y_2 + \tan C \cdot y_3}{\tan A + \tan B + \tan C})$$

(5) 对于非直角三角形,由 $\triangle ABC$ 的外心是中位 $\triangle DEF$ 的垂心,则得 $\triangle ABC$ 的外心坐标为

$$O(\frac{x_1(\tan B + \tan C) + x_2(\tan C + \tan A) + x_3(\tan A + \tan B)}{2(\tan A + \tan B + \tan C)},$$

$$\frac{y_1(\tan B+\tan C)+y_2(\tan C+\tan A)+y_3(\tan A+\tan B)}{2(\tan A+\tan B+\tan C)})$$

例 2.1 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=30°$，O 为外心，I 为内心，边 AC 上的点 D 与 BC 边上的点 E，使得 $AD=BE=AB$，求证：$OI=DE$。

证明 以 C 为原点，CB 为 x 轴建立直角坐标系，则 $C(0,0)$，$B(a,0)$，$A(\frac{\sqrt{3}}{2}b,\frac{1}{2}b)$，$DE^2=(b-c)^2+(a-c)^2-\sqrt{3}(b-c)(a-c)$。

由定理 1 知：$I(\frac{(2+\sqrt{3})ab}{2(a+b+c)},\frac{ab}{2(a+b+c)})$，外心 $O(\frac{1}{2}a,\frac{2b-\sqrt{3}a}{2})$，可以推得

$$OI^2=(b-c)^2+(a-c)^2-\sqrt{3}(b-c)(a-c)$$

所以 $OI=DE$。

例 2.2 （2004 年湖南省夏令营竞赛试题）在 $Rt\triangle ABC$ 中，D 为斜边 BC 中点，I_1,I_2 分别为 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心，过内心 I_1,I_2 的直线分别交 AB，AC 于 M,N，求证：$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMN}$。

证明 如图 2.2，建立直角坐标系，则由定理 1 中三角形内心坐标公式得

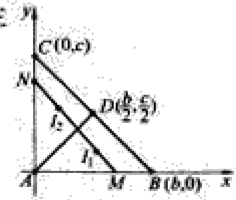


图 2.2

$$I_1\begin{cases}x=\dfrac{\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}}{a+b}=\dfrac{b}{2}\\ y=\dfrac{\frac{bc}{2}}{a+b}=\dfrac{bc}{2(a+b)}\end{cases}，即\ I_1(\frac{b}{2},\frac{bc}{2(a+b)})$$

$$I_2\begin{cases}x=\dfrac{\frac{bc}{2}}{a+c}=\dfrac{bc}{2(a+c)}\\ y=\dfrac{\frac{c^2}{2}+\frac{ac}{2}}{a+b}=\dfrac{c}{2}\end{cases}，即\ I_2(\frac{bc}{2(a+c)},\frac{c}{2})$$

所以
$$k_{I_1I_2}=\frac{\frac{bc}{2(a+c)}-\frac{c}{2}}{\frac{b}{2}-\frac{bc}{2(a+b)}}=-\frac{c(a+c)}{b(a+b)}$$

所以直线 I_1I_2 方程为

$$y-\frac{bc}{2(a+b)}=-\frac{c(a+c)}{b(a+b)}(x-\frac{b}{2})$$

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{c(a+b+c)}{2(a+b)}$；令 $y=0$，得 $x=\dfrac{b(a+b+c)}{2(a+c)}$，所以

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\frac{c(a+b+c)}{2(a+b)}\frac{b(a+b+c)}{2(a+c)}=\frac{1}{8}bc\frac{(a+b+c)^2}{(a+c)(a+b)}=$$
$$\frac{1}{8}bc\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{a^2+ab+bc+ca}$$

又 $a^2=b^2+c^2$，所以

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{8}bc\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{a^2+ab+bc+ca}=\frac{1}{4}bc=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

即
$$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AMN}$$

为了应用的方便，下面给出三角形五心的坐标表示的另一种形式，即为：

定理 2 若以 $\triangle ABC$ 的外心 O 为原点建立直角坐标系，R 为外接圆半径，则顶点坐标可设 $A(R\cos\alpha_1,R\sin\alpha_1)$，$B(R\cos\alpha_2,R\sin\alpha_2)$，$C(R\cos\alpha_3,R\sin\alpha_3)$（$0^\circ\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<360^\circ$），于是，$\triangle ABC$ 的外心 O，内心 I，垂心 H，重心 G 以及 $\angle A,\angle B,\angle C$ 内的旁心 I_a,I_b,I_c 的坐标分别为：

(1) $O(0,0)$.

(2) $G\left(\frac{R}{3}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3),\frac{R}{3}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)\right)$.

(3) $H(R(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3),R(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3))$.

(4) $I\left(R\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right),\right.$

$\left.R\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)\right)$.

(5) $I_a\left(R\left(-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right),\right.$

$\left.R\left(-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)\right)$;

$I_b\left(-R\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right),\right.$

$\left.-R\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)\right)$;

$I_c\left(R\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}-\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right),\right.$

$\left.R\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}-\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)\right)$.

证明 (1) 是显然的.

(2) 由三角形重心坐标公式易知成立.

(3) 为了方便起见,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,且 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2$,由 $H(x,y)$ 及 $AH\perp BC$,得

$$k_{AH}\cdot k_{BC}=\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-1$$

即为
$$(x-x_1)(x_3-x_2)=(y-y_1)(y_3-y_2)$$

由于 $x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2$,得

$$(y_3-y_2)(y_3+y_2)=(x_3-x_2)(x_3+x_2)$$

代入上式得

$$(x-x_1)(y_3+y_2)=(y-y_1)(x_3+x_2) \quad ①$$

同理

$$(x-x_2)(y_3+y_1)=(y-y_2)(x_3+x_1) \quad ②$$

由 ①② 解得
$$x=x_1+x_2+x_3,\ y=y_1+y_2+y_3$$

由此可知:结论(3) 成立.

(4) 为了证明式(4),我们先指出,在研究三角形内心性质时已得到:若 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,延长 AI,BI,CI 分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 交于 A_1,B_1,C_1,则 I 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心.下面再来证明式(4).如图2.3所示,建立直角坐标系,因为 A_1 为 $\widehat{BC}$ 的中点,所以

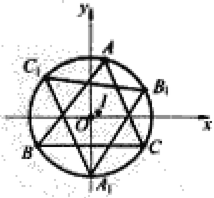


图 2.3

$$A_1(R\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2},R\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2})$$

因为 C_1 为 $\widehat{AB}$ 的中点,所以

$$C_1(R\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},R\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})$$

又设 B_2 为 $\widehat{ABC}$ 的中点,所以

$$B_2(R\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2},R\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2})$$

又 B_1 与 B_2 关于原点 O 中心对称,所以

$$B_1(-R\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2},-R\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2})$$

所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心为

$$(R(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}),$$
$$R(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}))$$

即为 $\triangle ABC$ 的内心.

(5) 为了证明式(5),我们先证明:若 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,延长 AI,BI,CI 分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 交于 A_1,B_1,C_1,又 A_1,B_1,C_1 关于圆心 O 的对称点分别为 A_2,B_2,C_2,则 $\triangle A_1B_1C_2$ 的垂心为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁心,$\triangle A_2B_1C_2$,$\triangle A_2B_2C_1$ 的垂心为 $\triangle ABC$ 的 $\angle B,\angle C$ 内的旁心.

证明 如图 2.4,由 I 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心知 $AA_1\perp B_1C_1$,联结 B_2C_1,B_1C_2,则 $\angle B_2C_1B_1=\angle C_1B_1C_2=90°$,所以 $B_2C_1B_1C_2$ 为矩形,且 $B_1C_2\,/\!/\,AA_1$,所以 $AA_1\perp B_2C_2$.

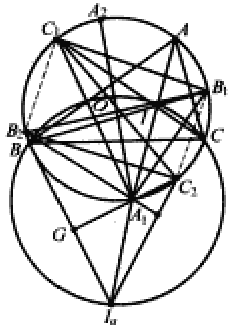


图 2.4

又 $\angle B_2BB_1=\angle I_aBC=90°$,所以 B_2,B,I_a 三点共线,又 $B_1B\perp A_1C_1$,所以 $I_aB\,/\!/\,A_1C_1$,所以 $\angle B_2I_aA_1=\angle C_1A_1A$,$\angle I_aA_1G=\angle AA_1C_2$,所以 $\angle B_2I_aA_1+\angle I_aA_1G=90°$,所以 $I_aB_2\perp C_2A_1$,同理 $I_aC_2\perp B_2A_1$.

所以 I_a 为 $\triangle A_1B_2C_2$ 的垂心.

同理:I_b,I_c 分别为 $\triangle A_2B_1C_2$ 中与 $\triangle A_2B_2C_1$ 中 $\angle B,\angle C$ 的旁心.

下面再证明式(5) 由

$$A_1\left(R\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2},R\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)$$

$$B_2\left(R\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2},R\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right)$$

$$C_1\left(R\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},R\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)$$

所以
$$C_2\left(-R\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},-R\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)$$

所以 $\triangle A_1B_2C_2$ 的垂心坐标为

$$\left(R\left(-\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\cos\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right),\right.$$

$$\left.R\left(-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}+\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)\right)$$

此即为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁心坐标.

同理可求 $\triangle ABC$ 中 $\angle B,\angle C$ 内的旁心坐标.

故式(5) 成立.

例 2.3 （《数学教学》2008 年第 8 期《数学问题与解答》栏目中问题 744）已知 $\triangle ABC$ 中，O，H 分别为外心，垂心，R 为其外接圆半径，试将 $AB^2+BC^2+CA^2+OH^2$ 写成关于 R 的函数.

解 以 $\triangle ABC$ 的外心 O 为原点建立直角坐标系，设顶点坐标分别为

$$A(R\cos\alpha_1, R\sin\alpha_1), B(R\cos\alpha_2, R\sin\alpha_2), C(R\cos\alpha_3, R\sin\alpha_3)$$

则点 $$H(R(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3), R(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3))$$

于是

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2+OH^2 = R^2[&(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)^2+(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)^2+\\&(\cos\alpha_2-\cos\alpha_3)^2+(\sin\alpha_2-\sin\alpha_3)^2+\\&(\cos\alpha_3-\cos\alpha_1)^2+(\sin\alpha_3-\sin\alpha_1)^2+\\&(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3)^2+\\&(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3)^2]\end{aligned}$$

将上式展开并利用公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 进行合并同类项便可得

$$AB^2+BC^2+CA^2+OH^2=9R^2$$

例 2.4 （第 30 届 IMO 预选试题改编题）设 O，H 分别是非直角 $\triangle ABC$ 的外心、垂心，问 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，才能使 $AH=OH$？

解 以 $\triangle ABC$ 的外心 O 为坐标原点建立直角坐标系，设 $A(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$，$B(R\cos\beta, R\sin\beta)$，$C(R\cos\gamma, R\sin\gamma)$，则由两点间的距离公式得

$$|AH|=R\sqrt{2+2\cos(\gamma-\beta)}=|OA|=R$$

所以 $$\cos(\gamma-\beta)=-\frac{1}{2}$$

又 $0<|\gamma-\beta|<2\pi$，所以

$$2\angle A=|\gamma-\beta|=\frac{2}{3}\pi \text{ 或 } \frac{4}{3}\pi$$

所以 $$\angle A=\frac{1}{3}\pi \text{ 或 } \frac{2}{3}\pi$$

故当 $\angle A=\frac{1}{3}\pi$ 或 $\frac{2}{3}\pi$ 时，有 $AH=OA$.

例 2.5 （1992 年全国高中数学联赛试题）如图 2.5，设 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形，H_1，H_2，H_3，H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证：H_1，H_2，H_3，H_4 四点在同一圆上，并定出该圆的圆心位置.

这是已经证明过的一道试题，下面再提供一种简捷的解法证明.

证明 不失一般性，设 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圆圆心在坐标原点，半径为 R，并

设四个顶点的坐标为 $A_1(R\cos\alpha_1, R\sin\alpha_1)$，$A_2(R\cos\alpha_2, R\sin\alpha_2)$，$A_3(R\cos\alpha_3, R\sin\alpha_3)$，$A_4(R\cos\alpha_4, R\sin\alpha_4)$.

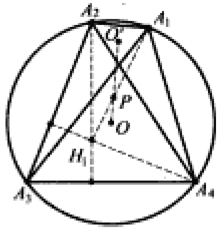


图 2.5

则 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心坐标为

$H_1(R(\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4), R(\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4))$

$H_2(R(\cos\alpha_3+\cos\alpha_4+\cos\alpha_1), R(\sin\alpha_3+\sin\alpha_4+\sin\alpha_1))$

$H_3(R(\cos\alpha_4+\cos\alpha_1+\cos\alpha_2), R(\sin\alpha_4+\sin\alpha_1+\sin\alpha_2))$

$H_4(R(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3), R(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3))$

考虑点 $O'(R(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4), R(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4))$，容易计算

$$O'H_1 = O'H_2 = O'H_3 = O'H_4 = R$$

于是 H_1, H_2, H_3, H_4 四点在以 O' 为圆心，以半径为 R 的圆上，从而本题获证.

例 2.6 （第 43 届 IMO 试题）BC 为圆 O 的直径，A 为圆 O 上的一点，$0° < \angle AOB < 120°$，D 是弧 AB（不含 C 的弧）的中点，过 O 作平行于 DA 的直线交 AC 于 J，OA 垂直平分线交圆 O 于 E，F.

求证：J 是 $\triangle CEF$ 的内心.

证明 如图 2.6，$A(R\cos\theta, R\sin\theta)$，$\angle AOC=\theta$，$C(R\cos 0°, R\sin 0°)$，$B(R\cos 180°, R\sin 180°)$，$O(0,0)$，联结 OE，EF 交 OA 于 M.

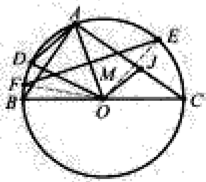


图 2.6

所以 $OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OE$，所以 $\angle MEO=30°$，所以 $\angle AOE=60°$，所以 $\angle EOC=\theta-60°$，因为 $0°<\angle AOB<120°$，所以 $60°<\theta<180°$，所以 $\theta-60°>0°$，$\angle COF=\theta+60°$，$E(R\cos(\theta-60°), R\sin(\theta-60°))$，$F(R\cos(\theta+60°), R\sin(\theta+60°))$，所以 $\triangle CEF$ 的内心 $I'(x',y')$，所以

$$x' = R\left(\cos\frac{0°+\theta-60°}{2}+\cos\frac{\theta-60°+\theta+60°}{2}-\cos\frac{0°+\theta+60°}{2}\right)=$$

$$R\cos\theta+R\sin\frac{\theta}{2}$$

同理 $$y' = R\sin\theta - R\cos\frac{\theta}{2}$$

因为 $$\angle AOD = 90° - \frac{\theta}{2}$$

所以 $$\angle DAO = 45° + \frac{\theta}{4}$$

所以 $$\angle AOJ = \angle DAO = 45° + \frac{\theta}{4}$$

所以 $$\angle JOC = \frac{3\theta}{4} - 45°$$

所以 $$\angle OJC = 180° - \frac{3\theta}{4} + 45° - \frac{180° - \theta}{2} = 135° - \frac{1}{4}\theta$$

所以 $$\frac{OJ}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{R}{\sin(135° - \frac{1}{4}\theta)}, OJ = \frac{R\sin(90° + \frac{\theta}{2})}{\sin(45° + \frac{1}{4}\theta)} = 2R\cos(45° + \frac{1}{4}\theta)$$

设 $J(x,y)$，所以

$$x = OJ\cos(\frac{3}{4}\theta - 45°) = 2R\cos(45° + \frac{\theta}{4})\cos(\frac{3\theta}{4} - 45°) =$$
$$R(\cos\theta + \cos(90° - \frac{\theta}{2})) = R(\cos\theta + \sin\frac{\theta}{2})$$
$$y = OJ\sin(\frac{3}{4}\theta - 45°) = 2R\cos(45° + \frac{\theta}{4})\sin(\frac{3\theta}{4} - 45°) =$$
$$R(\sin\theta + \sin(90° - \frac{\theta}{2})) = R(\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2})$$

所以 J 与 I' 重合.

所以 J 是 $\triangle CEF$ 的内心.

练习 7

1.(全俄数学奥林匹克竞赛) 如图 2.7, M 为等腰 $\triangle ABC$ 底边 AC 的中点，$MH \perp BC$ 于 H, P 是 MH 中点,求证: $AH \perp BP$.

2. 如图 2.8, BC 为圆 O 的直径, A 为圆 O 上的一点, $0° < \angle AOB < 120°$, D 是 $\overset{\frown}{ACB}$ 的中点,过 O 作 $OK // AD$ 交 CA 的延长线于 K, OA 的垂直平分线交圆 O 于 E, F.

证明: K 是 $\triangle CEF$ 的顶点 C 所对的旁心.

3. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,证明:对任意点 P 都有

$$a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2 =$$
$$a \cdot IA^2 + b \cdot IA^2 + c \cdot IC^2 + (a + b + c) \cdot IP^2$$

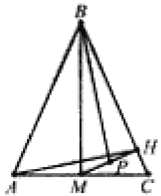


图 2.7

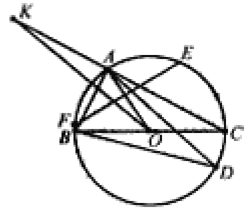


图 2.8

第 2 节　三角形五心的向量形式及应用

向量是数与形的有机结合体．因此，利用向量的加法、减法和向量的数量积运算，解决几何问题显得简洁、明快、思路清晰．下面，就利用向量来研究三角形的五心．

一、三角形五心的向量形式的充要条件及其应用

在这一部分内容中，先用几何方法证明三角形五心的向量表示的充要条件，再用代数方法(即解析几何方法)给出三角形五心的向量统一形式，然后再举例说明它们的应用．

定理 1　(1) 若点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，则 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心．

(2) 若点 H 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，则 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}\Leftrightarrow$ 点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心．

(3) 若点 G 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，则 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心．

(4) 若点 I 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，则

$$\overrightarrow{IA}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)=\overrightarrow{IB}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}-\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\right)=\overrightarrow{IC}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}-\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\right)=\mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\mathbf{0}\Leftrightarrow \text{点 } I \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的内心}$$

(5) 若点 I_a, I_b, I_c 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的点，则

$a\overrightarrow{I_aA}=b\overrightarrow{I_bB}+c\overrightarrow{I_cC}\Leftrightarrow$ 点 I_a 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁心．

$b\overrightarrow{I_bB}=c\overrightarrow{I_cC}+a\overrightarrow{I_aA}\Leftrightarrow$ 点 I_b 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 内的旁心.

$c\overrightarrow{I_cC}=a\overrightarrow{I_aA}+b\overrightarrow{I_bB}\Leftrightarrow$ 点 I_c 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 内的旁心.

证明 (1) 由三角形外心定义及向量模的计算公式:$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$ 易知结论成立.

(2) 由$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA})=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{AC}$,同理:$\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$,于是得证.

(3) 由$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$,以$\overrightarrow{GA}$与$\overrightarrow{GB}$为邻边作平行四边形 $GAC'B$,设 GC 与 AB 交于点 D,则 D 为 AB 的中点$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC'}$,则$\overrightarrow{GC'}=GC$,所以,$C,G,C',D$ 四点共线,所以 CD 为 $\triangle ABC$ 的中线,同理,AE,BF 为 $\triangle ABC$ 的中线,故点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

(4) 由$\overrightarrow{IA}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)=\boldsymbol{0}$,说明点 I 在 $\angle A$ 的内角平分线上,同理,点 I 在 $\angle B$,$\angle C$ 的内角平分线上,所以,点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.反之亦然.

如图 2.9,由内角平分线性质定理:点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,则

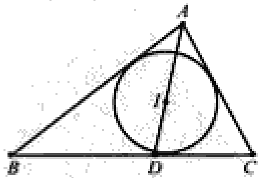


图 2.9

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{b+c}{a}$$

又$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}$,$B,C,D$ 三点共线,所以

$$\overrightarrow{ID}=\frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{IB}+\frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{IC}$$

从而
$$\frac{a}{b+c}\cdot\overrightarrow{AI}=\frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{IB}+\frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{IC}$$

得 $a\overrightarrow{AI}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\boldsymbol{0}$.反之亦然.

(5) 如图 2.10,由三角形外角平分线性质定理得:若点 I_a 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁心,则

$$\frac{AI_a}{I_aD}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB+AC}{BD+CD}=\frac{b+c}{a}$$

又$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}$,$B,C,D$ 三点共线,所以

$$\overrightarrow{I_aD}=\frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{I_aB}+\frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{I_cC}$$

从而 $$-\frac{a}{b+c}\cdot\overrightarrow{AI_a}=\frac{b}{b+c}\cdot\overrightarrow{I_aB}+\frac{c}{b+c}\cdot\overrightarrow{I_cC}$$

得 $$a\overrightarrow{I_aA}+b\overrightarrow{I_aB}+c\overrightarrow{I_cC}=0$$

反之亦成立.

同理可证其他两式.

为了应用上的方便,为此先证.

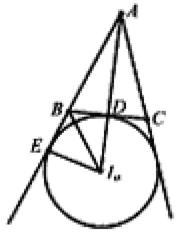


图 2.10

定理2 三角形五心向量的统一形式:已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点,存在实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=0$.设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c,如图2.11,以 AB 所在直线为 x 轴,AB 中点位为原点建立直角坐标系,且点 C 在 x 轴上方,则

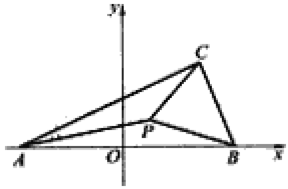


图 2.11

$$A(-\frac{c}{2},0),B(\frac{c}{2},0)$$

$$x_c=b\cos A-\frac{c}{2}=b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\frac{c}{2}=\frac{b^2-a^2}{2c},y_c=b\sin A$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R,则 $\sin A=\frac{a}{2R}$,$y_c=\frac{ab}{2R}$,即 $C(\frac{b^2-a^2}{2c},\frac{ab}{2R})$,设 $P(x,y)$,因为 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=0$,所以

$$\begin{cases}\lambda_1(-\frac{c}{2}-x)+\lambda_2(\frac{c}{2}-x)+\lambda_3(\frac{b^2-a^2}{2c}-x)=0\\-\lambda_1y-\lambda_2y+\lambda_3(\frac{ab}{2R}-y)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{-\frac{c}{2}\lambda_1+\frac{c}{2}\lambda_2+\frac{b^2-a^2}{2c}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\\y=\dfrac{\frac{ab}{2R}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\end{cases}\qquad(*)$$

其中 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\neq0$.

(1) 若 P 为 $\triangle ABC$ 的重心,由重心坐标公式可得 $P(\frac{b^2-a^2}{6c},\frac{ab}{6R})$,代入式(*)得

$$\begin{cases}\dfrac{b^2-a^2}{6c}=\dfrac{-\dfrac{c}{2}\lambda_1+\dfrac{c}{2}\lambda_2+\dfrac{b^2-a^2}{2c}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} & ① \\ \dfrac{ab}{6R}=\dfrac{\dfrac{ab}{2R}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} & ②\end{cases}$$

化简式②得：$\lambda_1+\lambda_2=2\lambda_3$，代入式①得

$$\frac{b^2-a^2}{6c}=\frac{-c^2\lambda_1+c^2\lambda_2+(b^2-a^2)\lambda_3}{3\lambda_3\cdot 2c}$$

所以

$$-c^2\lambda_1+c^2\lambda_2=0$$

所以

$$\lambda_1=\lambda_2$$

从而

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$$

于是可得：点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

(2) 若 P 为 $\triangle ABC$ 的内心，如图 2.12 所示，延长 CP 交 AB 于 E，由角平分线定理可知，E 分 $\overrightarrow{AB}$ 的比为 $\dfrac{b}{a}$，可得 $E\left(\dfrac{(b-a)c}{2(a+b)},0\right)$，$P$ 分 $\overrightarrow{EC}$ 的比为 $\dfrac{c}{a+b}$，可得

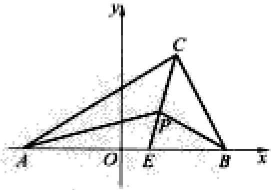


图 2.12

$$P\left(\frac{b-a}{2},\frac{abc}{2R(a+b+c)}\right)$$

代入式(*)得

$$\begin{cases}\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{-\dfrac{c}{2}\lambda_1+\dfrac{c}{2}\lambda_2+\dfrac{b^2-a^2}{2c}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\ \dfrac{abc}{2R(a+b+c)}=\dfrac{\dfrac{ab}{2R}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\end{cases}$$

化简可得

$$\begin{cases}b-a=\dfrac{-c^2\lambda_1+c^2\lambda_2+(b^2-a^2)\lambda_3}{c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} & ③ \\ \dfrac{c}{a+b+c}=\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} & ④\end{cases}$$

由式④得

$$c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=\lambda_3(a+b+c)$$

代人式③得

$$b-a=\frac{-c^2(\lambda_1-\lambda_2)+(b^2-a^2)\lambda_3}{\lambda_3(a+b+c)}\Rightarrow\lambda_3=\frac{c(\lambda_2-\lambda_1)}{b-a}$$

代人式④化简得 $\lambda_1:\lambda_2=a:b$，即 $\lambda_1=\frac{a}{b}\lambda_2$.

代人式④化简得：$\lambda_2:\lambda_3=b:c$，即 $\lambda_3=\frac{c}{b}\lambda_2$.

所以 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=a\cdot\overrightarrow{PA}+b\cdot\overrightarrow{PB}+c\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，于是可得：点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心的充要条件是

$$a\cdot\overrightarrow{PA}+b\cdot\overrightarrow{PB}+c\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$$

即

$$\overrightarrow{PA}\cdot\sin A+\overrightarrow{PB}\cdot\sin B+\overrightarrow{PC}\cdot\sin C=\mathbf{0}$$

(3) 若 P 为非直角 $\triangle ABC$ 的垂心，如图 2.13，则 P 与 C 的横坐标相同，设 P 的纵坐标为 y，则

$$P\left(\frac{b^2-a^2}{2c},y\right),\overrightarrow{BP}=\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{2c},y\right)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{b^2-a^2+c^2}{2c},\frac{ab}{2R}\right)$$

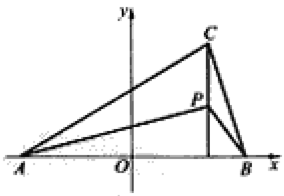


图 2.13

因为 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心，所以

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$$

解得

$$y=\frac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{4c^2}\cdot\frac{2R}{ab}$$

若 P 为垂心且存在实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则

$$\begin{cases}\dfrac{-\dfrac{c}{2}\lambda_1+\dfrac{c}{2}\lambda_2+\dfrac{b^2-a^2}{2c}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\dfrac{b^2-a^2}{2c} & ⑤\\ \dfrac{\dfrac{ab}{2R}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\dfrac{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{4c^2}\cdot\dfrac{2R}{ab} & ⑥\end{cases}$$

其中

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\neq 0$$

对式⑤化简得

$$(\lambda_1+\lambda_2)(b^2-a^2)=c^2(\lambda_2-\lambda_1)$$

即

$$(b^2+c^2-a^2)\lambda_1=(a^2+c^2-b^2)\lambda_2$$

即

$$\lambda_1 2bc\cos A=\lambda_2 2ac\cos B$$

即

$$\lambda_1\sin B\cos A=\lambda_2\sin A\cos B$$

即

$$\lambda_1\tan B=\lambda_2\tan A$$

对式⑥化简得

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{4R^2}{ab}=$$

$$\frac{\cos B\cos A}{\sin B\sin A}=\frac{1}{\tan A\tan B}$$

有
$$\lambda_3(\tan A\tan B-1)=\lambda_1+\lambda_2=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A}\lambda_1$$

化简得
$$\lambda_3\tan A=\lambda_1\tan C$$

则
$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=\tan A:\tan B:\tan C$$

所以 P 为非直角 $\triangle ABC$ 的垂心时，有

$$\overrightarrow{PA}\cdot\tan A+\overrightarrow{PB}\cdot\tan B+\overrightarrow{PC}\cdot\tan C=\mathbf{0}$$

反之亦成立，所以 P 为非直角 $\triangle ABC$ 的垂心的充要条件是

$$\overrightarrow{PA}\cdot\tan A+\overrightarrow{PB}\cdot\tan B+\overrightarrow{PC}\cdot\tan C=\mathbf{0}$$

特别地当 P 为 Rt$\triangle ABC$ 的垂心时，P 就是直角顶点，不妨设 $\angle C$ 为直角，则 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$ 中，有 $\lambda_1=\lambda_2=0$，λ_3 任意.

(4) 若 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，如图 2.14 所示，则 P 在 y 轴上，取 BC 中点 M，可求 $M\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4c},\frac{ab}{4R}\right)$，则 PM 与 BC 垂直，设

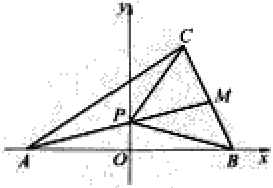


图 2.14

$$P(0,y),\overrightarrow{PM}=\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4c},\frac{ab}{4R}-y\right)$$

$$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{2c},\frac{ab}{2R}\right)$$

由 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 可求得

$$y=\frac{2R}{ab}\cdot\frac{(b^2-a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{8c^2}+\frac{ab}{4R}$$

若 P 为外心且存在实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使 $\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则

$$\begin{cases}\dfrac{-\frac{c}{2}\lambda_1+\frac{c}{2}\lambda_2+\frac{b^2-a^2}{2c}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=0 & ⑦\\[2ex] \dfrac{\frac{ab}{2R}\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=\dfrac{2R}{ab}\cdot\dfrac{(b^2-a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{8c^2}+\dfrac{ab}{4R} & ⑧\end{cases}$$

其中
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\neq 0$$

由式 ⑦ 可得

$$(b^2-a^2)\lambda_3=c^2(\lambda_1-\lambda_2)$$

即 $$\lambda_3(\sin^2 B-\sin^2 A)=(\lambda_1-\lambda_2)\sin^2 C$$

即 $$\lambda_3(\sin B-\sin A)(\sin B+\sin A)=(\lambda_1-\lambda_2)\sin^2 C$$

由和差化积公式有

$$2\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}2\sin\frac{B+A}{2}\lambda_3\cos\frac{B-A}{2}=(\lambda_1-\lambda_2)\sin^2 C$$

化简可得 $$\lambda_3\sin(B-A)=(\lambda_1-\lambda_2)\sin C$$

由式 ⑧ 化简可得

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=(\frac{2R}{ab})^2\cdot\frac{(b^2-a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{8c^2}+\frac{1}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2R}{a}\cdot\frac{2R}{b}\cdot\frac{-(a^2+c^2-b^2)}{2ac}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{1}{2}=$$

$$\frac{1}{2}(1-\frac{\cos B\cos A}{\sin B\sin A})=\frac{\cos C}{2\sin A\sin B}\Rightarrow$$

$$\lambda_3(2\sin A\sin B-\cos C)=(\lambda_1+\lambda_2)\cos C\Rightarrow$$

$$\lambda_3\cos(B-A)=(\lambda_1+\lambda_2)\cos C$$

综合得 $$\begin{cases}\lambda_3\sin(B-A)=(\lambda_1-\lambda_2)\sin C\\ \lambda_3\cos(B-A)=(\lambda_1+\lambda_2)\cos C\end{cases}$$

当 $\lambda_3\neq 0$ 时，两式交叉相乘可得

$$(\lambda_1+\lambda_2)\sin(B-A)\cos C=(\lambda_1-\lambda_2)\sin C\cos(B-A)\Rightarrow$$

$$\lambda_2(\sin(B-A)\cos C)+\sin C\cos(B-A))=$$

$$\lambda_1(\sin C\cos(B-A)-\sin(B-A)\cos C)\Rightarrow$$

$$\lambda_2\sin(B+C-A)=\lambda_1\sin(A+C-B)\Rightarrow$$

$$\lambda_2\sin 2A=\lambda_1\sin 2B$$

令 $\lambda_1=\sin 2A$，则 $\lambda_2=\sin 2B$，则

$$\lambda_2\sin(B-A)=\sin C(\sin 2A-\sin 2B)$$

由和差化积公式可得

$$\lambda_3=\sin 2C$$

所以 P 为 $\triangle ABC$ 的外心时有

$$\overrightarrow{PA}\cdot\sin 2A+\overrightarrow{PB}\cdot\sin 2B+\overrightarrow{PC}\cdot\sin 2C=\mathbf{0}$$

反之亦成立，所以 $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$，由

$$\begin{cases}\lambda_3\sin(B-A)=(\lambda_1-\lambda_2)\sin C\\ \lambda_3\cos(B-A)=(\lambda_1+\lambda_2)\cos C\end{cases}$$

可得 $\lambda_1=\lambda_2$ 且 $\angle C=90°$，也满足上式，所以 P 为 $\triangle ABC$ 的外心的充要条件是

$$\overrightarrow{PA}\cdot\sin 2A+\overrightarrow{PB}\cdot\sin 2B+\overrightarrow{PC}\cdot\sin 2C=\mathbf{0}$$

(5) 若 P 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁心，如图 2.15 所示，由外角平分线定理可知：E 分 $\overrightarrow{AB}$ 的比为 $-\dfrac{b}{a}$，可得 $E(\dfrac{c(a+b)}{2(b-a)},0)$，点 P 分 $\overrightarrow{EC}$ 的比为 $\dfrac{c}{b-a}$，可得

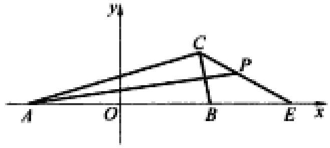


图 2.15

$$P(\frac{c^2(a+b)+c(b^2-a^2)}{2c(-a+b+c)},\frac{abc}{2R(-a+b+c)})$$

代入式(*)得

$$\begin{cases}\dfrac{c^2(a+b)+c(b^2-a^2)}{2c(-a+b+c)}=\dfrac{-c^2(\lambda_1-\lambda_2)+(b^2-a^2)\lambda_3}{2c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} & ⑨\\ \dfrac{abc}{2R(-a+b+c)}=\dfrac{ab\lambda_3}{2R(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} & ⑩\end{cases}$$

化简式 ⑩ 得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{\lambda_3(-a+b+c)}{c} \quad ⑪$$

代入式 ⑨ 化简得 $\lambda_3=\dfrac{c(\lambda_2-\lambda_1)}{a+b}$，即 $\lambda_3=\dfrac{c}{b}\lambda_2$.

代入式 ⑪ 化简得 $\lambda_1:\lambda_2=-a:b$，即 $\lambda_1=-\dfrac{a}{b}\lambda_2$.

代入式 ⑪ 化简得 $\lambda_3=\dfrac{c}{b}\lambda_2=-\dfrac{c}{a}\lambda_1$，所以

$$\lambda_1\overrightarrow{PA}+\lambda_2\overrightarrow{PB}+\lambda_3\overrightarrow{PC}=-a\cdot\overrightarrow{PA}+b\cdot\overrightarrow{PB}+c\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$$

于是可得：点 P 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁心的充要条件是

$$a\cdot\overrightarrow{PA}=b\cdot\overrightarrow{PB}+c\cdot\overrightarrow{PC}$$

即

$$\overrightarrow{PA}\cdot\sin A=\overrightarrow{PB}\cdot\sin B+\overrightarrow{PC}\cdot\sin C$$

同理可证：点 P 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 与 $\angle C$ 内的旁心的充要条件是

$$b\cdot\overrightarrow{PB}=c\cdot\overrightarrow{PC}+a\cdot\overrightarrow{PA}$$

与

$$c\cdot\overrightarrow{PC}=a\cdot\overrightarrow{PA}+b\cdot\overrightarrow{PB}$$

即

$$\overrightarrow{PB}\cdot\sin B=\overrightarrow{PC}\cdot\sin C+\overrightarrow{PA}\cdot\sin A$$

与
$$\overrightarrow{PC}\cdot\sin C=\overrightarrow{PA}\cdot\sin A+\overrightarrow{PB}\cdot\sin B$$

定理 3 在 $\triangle ABC$ 中，若点 D 在 BC 所在直线上，且 $BD=\lambda DC$，则
$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda} \qquad ①$$

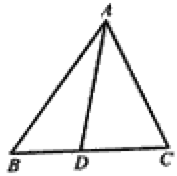


图 2.16

证明 如图 2.16，因为 $BD=\lambda DC$，所以
$$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{DC} \qquad ②$$
又
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} \qquad ③$$
所以
$$\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{DC} \qquad ④$$
③ + ④ 并利用 ②，得
$$(1+\lambda)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}$$
所以
$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}$$

这实际上是线段的定比分点坐标公式的向量形式，它在解题中非常有用.特别地，

(1) 当 $\lambda=1$ 时，由式 ① 即得线段 BC 的向量形式的中点公式为：$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$；

(2) 当 $\lambda=\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{c}{b}$ 时，即得 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的内角平分线的向量表达式为
$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$$

(3) 当 $\lambda=-\frac{|BD|}{|DC|}=-\frac{|AB|}{|AC|}=-\frac{c}{b}$ 时，即得 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的外角平分线的向量表达式为
$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}}{b-c}$$

(4) 对于锐角三角形(对钝角三角形相仿)，当 $\lambda=-\frac{|BD|}{|DC|}=\frac{c\cos B}{b\cos C}$ 时，即得 $\triangle ABC$ 中 BC 上的高的向量表达式为
$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\cos C\cdot\overrightarrow{AB}-c\cos C\cdot\overrightarrow{AC}}{b\cos C-c\cos C}$$

(5) 对于锐角三角形(对钝角三角形相仿) 当 AD 过 $\triangle ABC$ 的外心时，如图

2.17 所示,有

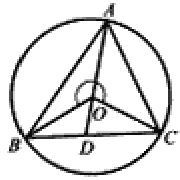


图 2.17

$$\lambda = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} =$$

$$\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle ACD} - S_{\triangle COD}} \sqrt{a^2 + b^2} =$$

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}} = \frac{\frac{1}{2} AO \cdot BO \sin \angle AOB}{\frac{1}{2} AO \cdot CO \sin \angle AOB} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$$

即得 AD 的向量表达式为

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\sin 2B \cdot \overrightarrow{AB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{AC}}{\sin 2B + \sin 2C}$$

反过来,我们有:

定理 4 若 O, A, P, C 为平面上四点,满足$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}(a, b \in \mathbf{R})$,且 $a + b = 1$,则 A, P, B 三点共线.

证明 因为

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = a\overrightarrow{OA} + (1 - a)\overrightarrow{OB}$$

所以 $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + a(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$

即 $$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = a(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$

所以 $$\overrightarrow{BP} = a\overrightarrow{BA}$$

所以$\overrightarrow{BP} \parallel \overrightarrow{BA}$,又向量$\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{BA}$共点 B,故 A, P, B 三点共线.

说明 本定理是证明三点共线的常用依据,本定理的证法是三点共线的常用方法,请注意,在这里指出"两向量$\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{BA}$共点 B"的步骤是不能少的.这是因为仅有"$\overrightarrow{BP}$与$\overrightarrow{BA}$平行",还不能推出 A, P, B 三点共线.

定理 5 如图 2.18,D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 所在直线上不同于 B, C 的一点,不过顶点 A 的直线 l 分别 AB, AD, AC 交于 E, P, F 点,若 $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{BE} = \lambda_1\overrightarrow{EA}$,$\overrightarrow{DP} = \lambda_2\overrightarrow{PA}$,$\overrightarrow{CF} = \lambda_3\overrightarrow{FA}$,则有

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda \cdot \lambda_3}{1 + \lambda}$$

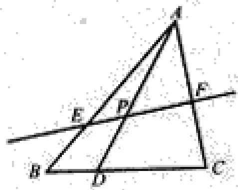


图 2.18

证明 设$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$,则

$$\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{DC}$$

及有向线段的定比分点公式知

$$\overrightarrow{AD}=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$

因为$\overrightarrow{DP}=\lambda_2\overrightarrow{PA}$,从而

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{1+\lambda_2}\overrightarrow{AD}=\frac{a+\lambda b}{(1+\lambda_2)(1+\lambda)} \quad ①$$

又 E,P,F 三点共线,所以设$\overrightarrow{EP}=m\overrightarrow{PF}$,于是

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AE}+m\overrightarrow{AF}}{1+m}=\frac{a}{(1+\lambda_1)(1+m)}+\frac{mb}{(1+\lambda_3)(1+m)} \quad ②$$

由 ①,② 得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(1+\lambda_2)(1+\lambda)}=\dfrac{1}{(1+\lambda_1)(1+m)}\\ \dfrac{1}{(1+\lambda_2)(1+\lambda)}=\dfrac{m}{(1+\lambda_3)(1+m)}\end{cases}$$

消去 m 化简整理得

$$\lambda_2=\frac{\lambda_1+\lambda\cdot\lambda_3}{1+\lambda}$$

特别地,当 $\lambda=1$时,点 D 为BC 中点时,$\lambda_1+\lambda_3=2\lambda_2$,若点 P 为AD 上定点时,λ_2 为定值 λ_0,此时,$\lambda_1+\lambda_3=2\lambda_0$ 为定值. 再 $\lambda_1=\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EA}}$,得$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{1+\lambda_1}$,同理:$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AC}}=\frac{1}{1+\lambda_3}$,$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AD}}=\frac{1}{1+\lambda_2}$,若再令$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}}=x$,$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AC}}=y$,$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AD}}=\lambda_0$,则有:

推论 1 如图2.19,已知 D 是$\triangle ABC$ 的边BC所在直线上不同于B,C的一点,点 P 为AD 上一定点,过点 P 的直线l 分别与AB,AC 交于点E,F. 若$\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AF}=y\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AP}=\lambda_0\overrightarrow{AD}$($\lambda_0$ 为定值),则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{\lambda_0}$为定值.

事实上,有$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)=2+\lambda_1+\lambda_3=2+2\lambda_2=2(1+\lambda_2)=\frac{2}{\lambda_0}$为定值.

推论 2 条件同上,若点 P 为$\triangle ABC$ 的重心G,则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$. 事实上,有

$$\lambda_0=\frac{2}{1+\lambda_2}=\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AD}}=\frac{2}{3}$$

所以

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$$

定理 6 在$\triangle ABC$中,若$\overrightarrow{AF}=\frac{m}{l}\overrightarrow{FB}$,$\overrightarrow{AE}=\frac{n}{l}\overrightarrow{FC}$(通分后总可以使两个异

分母分数化为同分母分数），联结 CF，BE 相交于点 D，则对于平面上任意一点 O，有

$$\overrightarrow{OD}=\frac{l}{m+n+l}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n+l}\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n+l}\overrightarrow{OC} \quad (*)$$

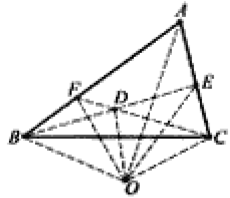


图 2.19

证明　如图 2.19，联结 OA，OB，OC，OE，OF，OD，由定比分点的向量表达式，得

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{m}{l}\overrightarrow{OB}}{1+\frac{m}{l}}=\frac{l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{l+m} \quad ①$$

同理

$$\overrightarrow{OE}=\frac{l\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OC}}{l+n} \quad ②$$

又

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OF}+\lambda\overrightarrow{OC}}{1+\lambda}=\frac{\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OE}}{1+\mu}\left(\text{其中}\frac{\overrightarrow{FD}}{\overrightarrow{DC}}=\lambda,\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DB}}=\mu\right) \quad ③$$

整理 ①②③ 式得 $\lambda=\frac{n}{m+l}$，故

$$\overrightarrow{OD}=\frac{l}{m+n+l}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n+l}\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n+l}\overrightarrow{OC}$$

于是以式（$*$）出发，可得三角形五心的向径向量表达式：

（1）若 BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的两边上的中线，交点 G 为重心，由（$*$）可得重心 G 的向径向量表达式为

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

（2）若 BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的两内角平分线，交点 I 为内心，由于 $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\frac{b}{a}$，$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}}=\frac{c}{a}$，由（$*$）可得内心 I 的向径向量表达式为

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$

（3）若 BE，CF 是 $\triangle ABC$ 两边的高，交点 H 是垂心，由于

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EC}}=\frac{c\cdot\cos A}{a\cdot\cos C}=\frac{\frac{c}{\cos C}}{\frac{a}{\cos A}}$$

同理：$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}}=\frac{\frac{b}{\cos B}}{\frac{a}{\cos A}}$，由式（*）可得垂心 H 的向径向量表达式为

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\frac{a}{\cos A}}{\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}}\overrightarrow{OA}+\frac{\frac{b}{\cos B}}{\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}}\overrightarrow{OB}+\frac{\frac{c}{\cos C}}{\frac{a}{\cos A}+\frac{b}{\cos B}+\frac{c}{\cos C}}\overrightarrow{OC}$$

(4) 若 BE，CF 的交点 O' 是 $\triangle ABC$ 的外心，即三边中垂线交点，则由定理2中(5)知

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EC}}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A},\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

由式（*）可得外心的向径向量表达式为

$$\overrightarrow{OO'}=\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{\sin 2B}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OC}$$

(5) 若 BE，CF 的交点 I_a 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的旁心，由三角形外角平分线性质得

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EC}}=-\frac{c}{a},\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}}=-\frac{b}{a}$$

由式（*）可得 $\angle A$ 的旁心 I_a 的向径向量表达式为

$$\overrightarrow{OI_a}=\frac{a}{a-b-c}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{b}{a-b-c}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{c}{a-b-c}\cdot\overrightarrow{OC}$$

同理可得：$\triangle ABC$ 中，$\angle B$，$\angle C$ 内的旁心 I_b，I_c 的向径向量表达式为

$$\overrightarrow{OI_b}=-\frac{a}{b-a-c}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{b}{b-a-c}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{c}{b-a-c}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OI_c}=-\frac{a}{c-a-b}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{b}{c-a-b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{c}{c-a-b}\cdot\overrightarrow{OC}$$

我们把以上各向量表达式，为了区别于定理1，称为三角形五心的向径向量表达式.

例2.7 （2003年新课程卷高考题）O 是平面上一定点，A，B，C 是平面上不

共线的三个点,动点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}),\lambda\in[0,+\infty)$,则动点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.外心　　B.内心　　C.重心　　D.垂心

解　由已知$\overrightarrow{AP}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$,据定理1中(4)知:点 P 在 $\angle A$ 内的角平分线所在直线上,故选 B.

例 2.8　(2005年江苏卷)在 $\triangle ABC$ 中,O 为中线 AM 上的一动点,若 $AM=2$,则$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$的最小值是________.

解　设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则

$$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}\cdot(3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA})=3\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}^2$$

要使其有最小值,则必须使$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OG}$反向.此时

$$3\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}^2=-3|\overrightarrow{OG}|\cdot|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OA}|^2=$$

$$-3|\overrightarrow{OA}|(\frac{4}{3}-|\overrightarrow{OA}|)-|\overrightarrow{OA}|^2=2(|\overrightarrow{OA}|-1)^2-2$$

故当 $|\overrightarrow{OA}|=1$,此时,点 O 是 AM 中点时,所求最小值为 -2.

例 2.9　已知向量$\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2},\overrightarrow{OP_3}$满足条件$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0}$,$|\overrightarrow{OP_1}|+|\overrightarrow{OP_2}|+|\overrightarrow{OP_3}|=1$,求证:$\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形.

证明　由已知$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OP_3}$,两边平方得

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=-\frac{1}{2}$$

同理　$$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=-\frac{1}{2},\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_1}=-\frac{1}{2}$$

所以　$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=|\overrightarrow{P_2P_3}|=|\overrightarrow{P_3P_1}|=\sqrt{3}$$

从而 $\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形.

反之,若点 O 是正 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中心,则显然有$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0}$,且 $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|$,即 O 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 所在平面内一点,$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\mathbf{0}$ 且 $|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|\Leftrightarrow$点 O 是正三角形 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中心.

例 2.10　如果 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 成等差数列,且 $a<b<c$,G 为重心,I 为内心,点 O 是平面上任意一点,求证:

(1) $\overrightarrow{OI}=\dfrac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$.

(2) $GI\parallel AC$.

解　(1) 如图 2.20,设 O 是 $\triangle ABC$ 平面上任一点,I 是 $\triangle ABC$ 的内心,所

以

$$\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD}$$

所以 $$BD=\frac{c}{b}\cdot CD$$

所以 $$\overrightarrow{BD}=\frac{c}{b}\cdot\overrightarrow{CD}$$

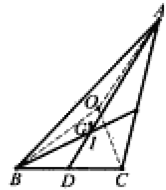


图 2.20

所以 $b\cdot\overrightarrow{BD}+c\cdot\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$，$\frac{AI}{ID}=\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD}=\frac{b+c}{a}$

所以 $a\cdot\overrightarrow{AI}=(b+c)\cdot\overrightarrow{ID}=b\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD})+c\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD})=b\cdot\overrightarrow{IB}+c\cdot\overrightarrow{IC}$

所以 $$a\overrightarrow{OI}+b\overrightarrow{OI}+c\overrightarrow{OI}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$$

所以 $$\overrightarrow{OI}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

(2) 因为 a,b,c 成等差数列，所以 $b=\frac{a+c}{2}$，所以

$$\overrightarrow{OI}=\frac{2a\cdot\overrightarrow{OA}+2b\cdot\overrightarrow{OB}+2c\cdot\overrightarrow{OC}}{3(a+c)}$$

$$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{2a\cdot\overrightarrow{OA}+2b\cdot\overrightarrow{OB}+2c\cdot\overrightarrow{OC}}{3(a+c)}=$$

$$\frac{c-a}{3(a+c)}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=\frac{c-a}{3(a+c)}\overrightarrow{CA}$$

因为 $a<c$，所以$\frac{c-a}{3(a+c)}\neq 0$，所以 $GI\parallel AC$.

例2.11 如图2.21，已知 C 为线段AB上一点，P 为直线外一点，满足 $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=2$，且$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}|}$，$I$ 是 PC 上一点，满足

$$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|}\right),\lambda>0$$

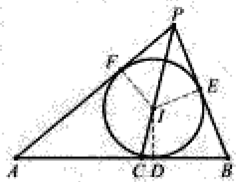


图 2.21

试求$\frac{\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$的值.

解析 $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=2\sqrt{5}$ 表示 A,B 两点的距离为$2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=2$ 表示点 P 到A,B 两点的距离之差为 2，由此可知：点 P 在以A,B 为焦点的双曲线偏近点 B 的一支上；$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}|}\Rightarrow\overrightarrow{PC}\left(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}-\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}\right)=\mathbf{0}$ 知

PC 为 $\angle APB$ 的角平分线.

因为$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}+\frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|})(\lambda>0)$,可知 I 在$\angle PAC$ 的角平分线上,所以 I 为 $\triangle PAB$ 的内心.

$\frac{\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$ 表示$\overrightarrow{BI}$ 在$\overrightarrow{BA}$ 上的射影长为 $|\overrightarrow{BD}|$.

记 $\triangle PAB$ 的内切圆 I 与 AB,BP,PA 三边分别切于 D,E,F,则

$$|\overrightarrow{AD}|-|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AF}|-|\overrightarrow{BE}|=(|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PE}|)-(|\overrightarrow{PB}|-|\overrightarrow{PE}|)=|\overrightarrow{PA}|-|\overrightarrow{PB}|=2$$

又
$$|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$$

两式相减得
$$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{5}-1$$

即
$$\frac{\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=\sqrt{5}-1$$

例 2.12 求证:四面体中三对棱中点连线共点.

证明 如图2.22,E,F,G,H,P,S 分别为四面体中三对对棱 AB,CD,BC,AD,AC,BD 的中点,设 EF,GH,PS 的中点分别为 Q,R,M,O 为空间任意一点,则

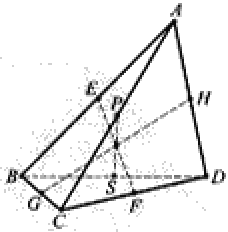


图 2.22

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

所以$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

同理 $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

故命题成立.

说明 本题的证明方法是运用向量证三线共点的常用方法.

我们知道,在 $\triangle ABC$ 所在平面内有一点 P,由平面向量基本定理知,向量$\overrightarrow{AP}$ 可以用三角形的边向量表示为$\overrightarrow{AP}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$,其中 λ_1,λ_2 是唯一确定的.如何确定 λ_1,λ_2 是用平面基本向量定理解题的关键.下面介绍用三角形面积表示平面基本向量定理.

定理 7 P 为$\angle ABC$ 所在区域内一点,S_B,S_C,S 分别表示 $\triangle APC,\triangle APB,\triangle ABC$ 的面积,则

$$\overrightarrow{AP}=\frac{S_B}{S}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{S_C}{S}\cdot\overrightarrow{AC}$$

证明 如图2.23,当点 P 不在直线AB,AC 上时,延长(或联结)AP 交BC 于 D,过点 D 分别作AC,AB 的平行线交AB 和AC 边所在直线于 E,F.因为

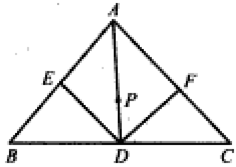


图 2.23

$$\overrightarrow{AP}=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AD}|}\overrightarrow{AD}$$

又 $$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$$

又 $$\overrightarrow{AE}=\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}=\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}$$

而 $$\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{BC}|},\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|}$$

所以 $$\overrightarrow{AP}=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AD}|}\frac{|\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{BC}|}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AD}|}\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|}\cdot\overrightarrow{AC}$$

因为 $$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AD}|}\frac{|\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ADC}}\cdot\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_B}{S}$$

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AD}|}\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ADB}}\cdot\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_C}{S}$$

由此可得 $$\overrightarrow{AP}=\frac{S_B}{S}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{S_C}{S}\cdot\overrightarrow{AC}$$

容易验证：当点 O 在直线 AB 或 AC 上时，结论也成立，这就是平面向量的面积表示定理.

推论 在 $\triangle ABC$，$BC=a,CA=b,AB=c$，则

(1) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心 G 时，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

(2) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心 I 时，$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

(3) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的外心 O 时

$$\overrightarrow{AO}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\cdot\overrightarrow{AC}$$

(4) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心 H 时

$$\overrightarrow{AH}=(\cot A\cot C)\overrightarrow{AB}+(\cot A\cot B)\cdot\overrightarrow{AC}$$

(5) 当点 P 分别为 $\angle A,\angle B,\angle C$ 内的旁心 I_a,I_b,I_c 时

$$\overrightarrow{AI_a}=\frac{b}{-a+b+c}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c}{-a+b+c}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI_b}=\frac{b}{a-b+c}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a-b+c}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI_c}=\frac{b}{a+b-c}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b-c}\cdot\overrightarrow{AC}$$

证明 (1) 如图 2.24，当点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时，$\frac{S_B}{S}=\frac{S_C}{S}=\frac{1}{3}$，由定理

知推论成立.

(2) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时,设内切圆半径为 r,则

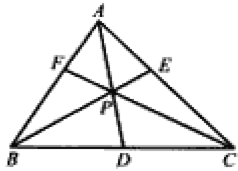


图 2.24

$$S_B = \frac{1}{2}br, S_C = \frac{1}{2}cr, S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

由定理知推论成立.

(3) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的外心时,设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,则

$$S_A = \frac{1}{2}R^2\sin\angle BOC = \frac{1}{2}R^2\sin 2A, S_B = \frac{1}{2}R^2\sin\angle AOC = \frac{1}{2}R^2\sin 2B$$

$$S_C = \frac{1}{2}R^2\sin\angle AOB = \frac{1}{2}R^2\sin 2C, S = \frac{1}{2}R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

由定理知推论成立.

(4) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心时,由于 $\frac{S_B}{S} = \frac{PE}{BE} = \frac{CE\cot\angle CPE}{CE\tan C}$,由 $\angle CPE = A$,所以 $\frac{S_B}{S} = \cot A\cot C$. 同理 $\frac{S_C}{S} = \cot A\cot B$,由定理知推论成立.

(5) 当点 P 分别为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的旁心时,设其旁切圆半径为 r_a,因为

$$S_B = \frac{1}{2}br_a, S_C = \frac{1}{2}cr_a, S = \frac{1}{2}(-a+b+c)r_a$$

所以
$$\frac{S_B}{S} = \frac{b}{-a+b+c}, \frac{S_C}{S} = \frac{c}{-a+b+c}$$

代入定理,得
$$\overrightarrow{AI_a} = \frac{b}{-a+b+c}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{c}{-a+b+c}\cdot\overrightarrow{AC}$$

同理有其他两式成立.

说明 若顶点 A 换为 B 或 C 时,还有六个类似的向量表达式.

定理 8 在 $\triangle ABC$ 中,A_1,B_1,C_1 分别是直线 BC,CA,AB 上的点,且满足:$\overrightarrow{AC_1} = \lambda\overrightarrow{C_1B}$,$\overrightarrow{BA_1} = \mu\overrightarrow{A_1C}$,$\overrightarrow{CB_1} = t\overrightarrow{B_1A}$,其中 λ,u,t 均不为 -1,则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 有相同重心的充要条件为 $\lambda = \mu = t$.

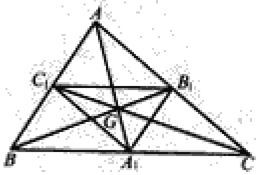


图 2.25

证明 如图 2.25,设点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$. 因为 $\overrightarrow{BA_1} = \mu\overrightarrow{A_1C}$,所以

$$\overrightarrow{GA_1} = \frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{GB} + \frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{GC}$$

同理
$$\overrightarrow{GB_1}=\frac{1}{1+t}\overrightarrow{GC}+\frac{t}{1+t}\overrightarrow{GA}$$
$$\overrightarrow{GC_1}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{GA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{GB}$$

所以
$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=(\frac{1}{1+\lambda}+\frac{t}{1+t})\overrightarrow{GA}+(\frac{1}{1+\mu}+\frac{\lambda}{1+\lambda})\overrightarrow{GB}+(\frac{1}{1+t}+\frac{\mu}{1+\mu})\overrightarrow{GC}$$

G 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 重心的充要条件为
$$\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}=0$$

则有 $(\frac{1}{1+\lambda}+\frac{t}{1+t})\overrightarrow{GA}+(\frac{1}{1+\mu}+\frac{\lambda}{1+\lambda})\overrightarrow{GB}+(\frac{1}{1+t}+\frac{\mu}{1+\mu})\overrightarrow{GC}=0$

等价于
$$(\frac{1}{1+\lambda}+\frac{t}{1+t})(-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC})+(\frac{1}{1+\mu}+\frac{\lambda}{1+\lambda})\overrightarrow{GB}+(\frac{1}{1+t}+\frac{\mu}{1+\mu})\overrightarrow{GC}=0$$

即
$$(\frac{1}{1+\mu}+\frac{\lambda-1}{1+\lambda}-\frac{t}{1+t})\overrightarrow{GB}+(\frac{1-t}{1+t}+\frac{\mu}{1+\mu}-\frac{1}{1+\lambda})\overrightarrow{GC}=0$$

因为 $\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}$ 不共线,所以
$$\frac{1}{1+\mu}+\frac{\lambda-1}{1+\lambda}-\frac{t}{1+t}=\frac{1-t}{1+t}+\frac{\mu}{1+\mu}-\frac{1}{1+\lambda}=0$$

即
$$\frac{1}{1+\mu}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{t}{1+t}+\frac{1}{1+\lambda},\frac{1}{1+t}+\frac{\mu}{1+\mu}=\frac{t}{1+t}+\frac{1}{1+\lambda}$$

所以
$$\frac{1}{1+\lambda}+\frac{t}{1+t}=\frac{1}{1+\mu}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{1}{1+t}+\frac{\mu}{1+\mu}$$

再令上式为 k,将所得三式相加得 $3k=3$,所以 $k=1$,并且可得 $\frac{t}{1+t}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$,所以 $\lambda=t$,同理可得 $\lambda=\mu$. 故 $\lambda=\mu=t$.

定理 9 在非 Rt$\triangle ABC$ 中,A_1,B_1,C_1 分别为直线 BC,CA,AB 上的点,且有:$\overrightarrow{AC_1}=\lambda\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{BA_1}=\mu\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{CB_1}=t\overrightarrow{B_1A}$,其中,$\lambda,\mu,t$ 均不为 -1,则 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 有相同垂心的充要条件是
$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\tan C=\frac{\mu}{1+t}\tan B,\frac{\mu}{1+\mu}\tan A=\frac{t}{1+\lambda}\tan C,\frac{t}{1+t}\tan B=\frac{\lambda}{1+\mu}\tan A$$

证明 如图 2.26,设 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c,下面我们来讨论 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 有相同垂心的充要条件. 不妨设点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,则有 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,因此
$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

由于 $\overrightarrow{A_1H}=\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BH}-\frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AB_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{1+t}\overrightarrow{AC}$$

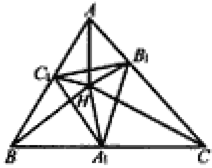


图 2.26

所以

$$\overrightarrow{A_1H}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=(\overrightarrow{BH}-\frac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{BC})\cdot(\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{1+t}\overrightarrow{AC})=$$

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{1+t}\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}+$$

$$\frac{\mu}{(1+\mu)(1+t)}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+$$

$$\frac{\mu}{(1+\mu)(1+t)}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{(1+\mu)(1+t)}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$

$$\frac{\mu}{(1+\mu)(1+t)}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}-\frac{\lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$$

同理 $\overrightarrow{B_1H}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\frac{t}{(1+t)(1+\lambda)}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{\mu}{(1+t)(1+\mu)}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{C_1H}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{t}{(1+\lambda)(1+t)}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

易知点 H 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 垂心的充要条件是

$$\overrightarrow{A_1H}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{B_1H}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{C_1H}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0$$

即有

$$\frac{\mu}{(1+\mu)(1+t)}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{\lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \quad ①$$

$$\frac{t}{(1+t)(1+\lambda)}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\mu}{(1+t)(1+\mu)}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} \quad ②$$

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{t}{(1+\lambda)(1+t)}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \quad ③$$

由知① $\frac{\mu}{(1+\mu)(1+t)}b\cdot a\cos C=\frac{\lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}a\cdot c\cos B$

即有 $\frac{\lambda}{1+\lambda}c\cos B=\frac{\mu}{1+t}b\cos C$

利用正弦定理有 $$\frac{\lambda}{1+\lambda}\tan C=\frac{\mu}{1+t}\tan B$$

同理将②,③可化为

$$\frac{\mu}{1+\mu}\tan A=\frac{t}{1+\lambda}\tan C,\frac{t}{1+t}\tan B=\frac{\lambda}{1+\mu}\tan A$$

特别地有:设 $\triangle ABC$ 为正三角形,A_1,B_1,C_1 分别为直线 BC,CA,AB 上的点,且 $\overrightarrow{AC_1}=\lambda\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{BA_1}=\mu\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{CB_1}=t\overrightarrow{B_1A}$,则 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 有相同垂心的充要条件是 $\lambda=\mu=t$.由以上定理即可证得.

例 2.13 (2005 年中国奥林匹克选拔考试试题)设 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点,记 $\triangle BPC,\triangle CPA,\triangle APB$ 的面积分别为 S_A,S_B,S_C.求证:$S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

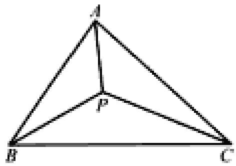


图 2.27

证明 如图 2.27,设 $\triangle ABC$ 的面积为 S,由定理得

$$\overrightarrow{AP}=\frac{S_B}{S}\overrightarrow{AB}+\frac{S_C}{S}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BP}=\frac{S_A}{S}\overrightarrow{BA}+\frac{S_C}{S}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CP}=\frac{S_B}{S}\overrightarrow{CB}+\frac{S_A}{S}\overrightarrow{CA}$$

所以 $$S_A\cdot\overrightarrow{AP}+S_B\cdot\overrightarrow{BP}+S_B\cdot\overrightarrow{CP}=\mathbf{0}$$

即 $$S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$$

例 2.14 (2006 届高三全国 100 所名校示范卷试题)已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 $AB=1,BC=\sqrt{6},AC=2$,记向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{u},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{v}$,设 $\triangle ABC$ 的外心为 O,若 $\overrightarrow{AO}=s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}$,求实数 s,t 的值.

解 因为 $AB=1,BC=\sqrt{6},AC=2$,由余弦定理得

$$\cos A=\frac{1-6+4}{4}=-\frac{1}{4},\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4},\sin 2A=-\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\cos B=\frac{1+6-4}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4},\sin B=\frac{\sqrt{10}}{4},\sin 2B=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos C=\frac{6+4-1}{4\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{8},\sin C=\frac{\sqrt{10}}{8},\sin 2C=\frac{3\sqrt{15}}{16}$$

所以 $$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{5\sqrt{15}}{16}$$

由此可得

$$\frac{\sin 2B}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}=\frac{4}{5},\frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}=\frac{3}{5}$$

由推论中(3)得

$$\overrightarrow{AO}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

所以
$$\overrightarrow{AO}=\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=su+tv$$

即
$$s=\frac{7}{5},t=\frac{3}{5}$$

例 2.15 (武汉市 2006 届高三 5 月考题)设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,当 $AB=AC=5,BC=6$ 时,$\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$,求实数 $m+n$ 的值.

解 在等腰 $\triangle ABC$ 中,因为当 $AB=AC=5,BC=6$,所以 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{24}{25}$,$\cos A=\frac{7}{25}$,$\cot A=\frac{7}{24}$,$\cot B=\cot C=\frac{3}{4}$,由推论中(4)知

$$\overrightarrow{AH}=\frac{7}{32}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{32}\overrightarrow{AC}$$

所以
$$\overrightarrow{AH}=\frac{7}{32}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{32}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{14}{32}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{32}\overrightarrow{BC}$$

又因为$\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{BC}$,所以 $m=\frac{14}{32},n=\frac{7}{32}$,即 $m+n=\frac{21}{32}$.

二、三角形"众心"关系的向量表示

定理 10 (1)若 $\triangle ABC$ 的重心为 G,P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内任意一点(特别是外心、内心、垂心或旁心等),则总有

$$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$$

(2)若 G_1 与 G_2 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心,则

$$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2})$$

(3)若用 a,b,c 分别表示 $\triangle ABC$ 的三内角 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边的长,设 P 是 $\triangle ABC$ 在平面内任意一点,I 是 $\triangle ABC$ 内一点,则 I 为 $\triangle ABC$ 内心的充要条件是

$$\overrightarrow{PI}=\frac{a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$$

(4)若 $\triangle ABC$ 的垂心为 H,外心为 O,则

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

证明 (1)由$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AG}$,$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BG}$,$\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CG}$,三式相加即得结论.

(2) 设点 O 为任意一点，则由(1)知

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}),\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})$$

两式相减得

$$\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}[(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OB_1})+(\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OC_1})]$$

即
$$\overrightarrow{G_1G_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2})$$

(3) 如图 2.28，设 I 为 $\triangle ABC$ 内心，且 $\overrightarrow{AB}=c\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{BC}=a\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CA}=b\boldsymbol{e}_3$（其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是单位向量），则存在正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足关系

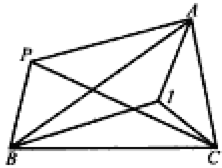


图 2.28

$$\begin{cases}\overrightarrow{AI}=\lambda_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)\\\overrightarrow{BI}=\lambda_2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)\\\overrightarrow{CI}=\lambda_3(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2)\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{PA}+\lambda_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)\\\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{PB}+\lambda_2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)\\\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{PC}+\lambda_3(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2)\end{cases}$$

因为
$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}\\\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{BI}\\\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CI}\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}c\boldsymbol{e}_1+\lambda_2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)=\lambda_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)\\a\boldsymbol{e}_2+\lambda_3(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2)=\lambda_2(\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1)\\b\boldsymbol{e}_3+\lambda_1(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)=\lambda_3(\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_2)\end{cases},\begin{cases}(c-\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_1\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0} & ①\\\lambda_2\boldsymbol{e}_1+(a-\lambda_2-\lambda_3)\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0} & ②\\\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_3\boldsymbol{e}_2+(b-\lambda_1-\lambda_3)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0} & ③\end{cases}$$

因为
$$c\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$$

所以
$$\boldsymbol{e}_3=-\frac{c}{b}\boldsymbol{e}_1-\frac{a}{b}\boldsymbol{e}_2$$

将上式代入(1)中公式，得

$$(c-\frac{b+c}{b}\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{e}_1+(\lambda_2-\frac{a}{b}\lambda_1)\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0}$$

由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，得

$$\begin{cases} c - \dfrac{b+c}{b}\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \dfrac{a}{b}\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{bc}{a+b+c} \\ \lambda_2 = \dfrac{ac}{a+b+c} \end{cases}$$

同理可得

$$\lambda_3 = \frac{ab}{a+b+c}$$

所以

$$\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PA} + \lambda_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) = \overrightarrow{PA} + \lambda_1(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{b}\overrightarrow{CA}) =$$
$$\overrightarrow{PA} + \frac{bc}{a+b+c}[\frac{1}{c}(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) - \frac{1}{b}(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC})] =$$
$$\frac{a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$$

充分性:由

$$\overrightarrow{PI} = \frac{a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC}}{a+b+c} = \overrightarrow{PA} + \frac{b\overrightarrow{PB} + c\overrightarrow{PC} - b\overrightarrow{PA} - c\overrightarrow{PA}}{a+b+c} =$$
$$\overrightarrow{PA} + \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a+b+c} = \overrightarrow{PA} + \frac{bc}{a+b+c}(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC})$$

得

$$\overrightarrow{AI} = \frac{bc}{a+b+c}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3)$$

即点 I 在 $\angle A$ 的平分线上.

同理可得:点 I 在 $\angle B$,$\angle C$ 的平分线上,亦即点 I 为 $\triangle ABC$ 内心.

(4) 如图 2.29,作直径 BD,联结 DA,DC,则 $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$,$DA \perp AB$,$DC \perp BC$,$AH \perp BC$,$CH \perp AB$,所以,$CH \parallel DA$,$AH \parallel DC$,所以四边形 $AHCD$ 是平行四边形,所以

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$$

又

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$$

所以

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

即

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

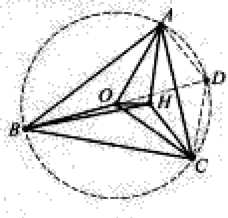


图 2.29

说明 若将(1)中中点 P 换成外心、内心、垂心或旁心时,即可得重心与其他四心连线向量的统一数学表达式;若(3)中中点 P 换成重心、外心、内心、旁心时,即可得内心与其他四心连线向量的统一数学表达式.还应注意到(1)中

中点 P 为空间任意一点时仍然成立.(3) 中公式实际上也是 $\triangle ABC$ 内心的一种向量表达式.下面举例说明这些知识的应用.

例 2.16 设 $\triangle ABC$ 的外心 O,垂心 H,重心 G,求证:$OG : GH = 1 : 2$.

证明 由定理知:$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$,又 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,所以 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$,所以,$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH})$,故 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

这表明 O,G,H 三点共线,且 $OG : GH = 1 : 2$.

说明 本题就是欧拉线定理,在前面已经证明过,但没有这里简便.

例 2.17 (1992 年全国高中数学联赛试题) 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形,H_1,H_2,H_3,H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4,\triangle A_3A_4A_1,\triangle A_4A_1A_2,\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心.求证:H_1,H_2,H_3,H_4 四点在同一圆上,并定出该圆的圆心位置.

证明 设

$$|OA_1| = |OA_2| = |OA_3| = |OA_4| = R,\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OC}$$

由于 H_1 为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂心,则

$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA_1}$$

得
$$|\overrightarrow{H_1C}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH_1}| = |\overrightarrow{OA_1}| = R$$

同理 $|\overrightarrow{H_2C}| = |\overrightarrow{OA_2}| = R,|\overrightarrow{H_3C}| = |\overrightarrow{OA_3}| = R,|\overrightarrow{H_4C}| = |\overrightarrow{OA_4}| = R$

这表明 H_1,H_2,H_3,H_4 四点在以 C 为圆心,R 为半径的圆周上.

说明 解答本题要注意到点 O 是四个三角形的共同圆心,同时利用向量平移及加法运算可以确定点 C 的位置,即圆心 C 的位置.

例 2.18 (第 30 届 IMO 预选试题改编题) 设 O,H 分别是非直角 $\triangle ABC$ 的外心、垂心. 问 $\triangle ABC$ 满足什么条件时,才能使 $AH = OA$?

解 若 $AH = OA$,则

$$|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{OA}| = R$$

即
$$|\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}| = R$$

又
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

所以
$$|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = R$$

即
$$(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 = R^2$$

则
$$R^2 = \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 2R^2 + 2R^2\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle$$

由三角形外心的性质知:

当 $\angle A$ 为锐角时,$\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle = 2\angle A$;当 $\angle A$ 为钝角时,$\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle = 2(\pi - \angle A)$,所以

$$\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle=\cos 2A=-\frac{1}{2}$$

又 $0<2A<2\pi$，所以 $\angle A=\frac{1}{3}\pi$ 或 $\frac{2}{3}\pi$.

由于以上推导过程可逆，故当 $\angle A=\frac{1}{3}\pi$ 或 $\frac{2}{3}\pi$ 时，有 $AH=OA$.

例 2.19 （2003 年中国国家集训队训练题）凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 M，点 P,Q 分别是 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMB$ 的重心，R,S 分别是 $\triangle DMC$ 和 $\triangle MAB$ 的垂心，求证：$PQ\perp RS$.

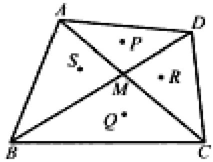


图 2.30

证明 如图 2.30，以任意点 O 为原点，利用向量证明.

$$\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})\cdot(\vec{Q}-\vec{P})=$$

$$(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})\cdot\frac{1}{3}\cdot(\vec{B}+\vec{M}+\vec{C}-\vec{A}-\vec{D}-\vec{M})=$$

$$\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})=$$

$$\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{DC})=$$

$$\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{AB})=$$

$$\frac{1}{3}\cdot[|\overrightarrow{SM}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos(\frac{3}{2}\pi-\angle ADC-\angle DAB)+$$

$$|\overrightarrow{MR}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos(\angle ADC+\angle DAB-\frac{1}{2}\pi)]=$$

$$\frac{1}{3}\cdot(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cdot\cot\angle AMB-|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cot\angle DMC)\cdot$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi-\angle ADC-\angle DAB)=0$$

所以，命题成立.

注：其中 $\vec{X}$ 表示向量 $\overrightarrow{OX}$.

练习 8

1. 已知 O 是平面上的一定点，A,B,C 是平面上不共线的三点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right),\lambda\in[0,+\infty)$，则动点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的（　　）

A.外心　　B.内心　　C.垂心　　D.重心

2.(2004年全国高中数学联赛试题)点 O 在 $\triangle ABC$ 内部,且 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$,求 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle AOC$ 的面积之比.

3.如图2.31,设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心,D 是边 AC 中点,E 是 $\triangle ABD$ 的重心.

证明:如果 $AB=AC$,则 $OE\perp BD$.

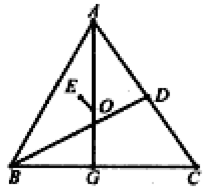


图2.31

第 3 章　三角形五心间的距离

我们在前面已经对三角形五心的概念和性质以及向量形式和坐标表示进行了详细的阐述. 在这一章里将给出三角形五心，即外心、重心、垂心、内心及旁心(三个旁心)共七个"心"之间的距离的计算公式. 首先给出

定理　设 D,E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AC,AB(所在直线)上的点，BD 与 CE 交于点 Q，若 $\frac{AD}{DC}=\lambda,\frac{AE}{EB}=\mu$，点 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点，则

$$PQ^2=\frac{PA^2+\mu PB^2+\lambda PC^2}{1+\lambda+\mu}-\frac{\lambda\mu a^2+\lambda b^2+\mu c^2}{(1+\lambda+\mu)^2} \quad ①$$

证明　我们仅就点 Q 在三角形内的情形得出证明，但证明对于点 Q 在三角形外的情形同样有效. 如图 3.1 所示建立直角坐标系，则点 $A(c\cos B,c\sin B)$，$B(0,0)$，$C(a,0)$，联结 AQ 交 BC 于 F. 由 $\frac{AD}{DC}=\lambda$，得 $\frac{CD}{DA}=\frac{1}{\lambda}$.

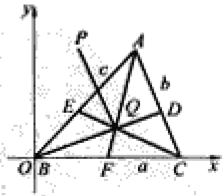


图 3.1

由塞瓦定理得 $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CD}{DA}=1$，即 $\mu\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{1}{\lambda}=1$，所以 $\frac{BF}{FC}=\frac{\lambda}{\mu}$.

由定比分点坐标公式得 $F\left(\frac{\lambda a}{\lambda+\mu},0\right)$，由于直线 BD 截 $\triangle ACF$ 于 B,Q,D 和梅涅劳斯定理得

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CB}{BF}\cdot\frac{FQ}{QA}=1$$

于是得

$$\frac{AQ}{QF}=\lambda+\mu$$

从而得点 Q 的坐标为

$$\left(\frac{\lambda a+c\cos B}{1+\lambda+\mu},\frac{c\sin B}{1+\lambda+\mu}\right)$$

设点 P 的坐标为 (x,y)，于是得

$$PQ^2 - \frac{PA^2 + \mu PB^2 + \lambda PC^2}{1 + \lambda + \mu} =$$

$$\left(x - \frac{\lambda a + c\cos B}{1 + \lambda + \mu}\right)^2 + \left(y - \frac{c\sin B}{1 + \lambda + \mu}\right)^2 - \frac{1}{1 + \lambda + \mu}\cdot$$

$$[(x - c\cos B)^2 - (y - c\sin B)^2 + \mu(x^2 + y^2) + \lambda(x - a)^2 + \lambda y^2]$$

利用 $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$,及 $2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$,上式右端经过整理可化简为

$$-\frac{1}{1 + \lambda + \mu}(\lambda\mu a^2 + \lambda b^2 + \mu c^2)$$

从而定理得证.

推论 1 若点 P 与点 A 重合,则 $PA = a, PB = c, PC = b$,代入公式 ① 整理得

$$AQ^2 = \frac{\lambda(\lambda + \mu)b^2 + \mu(\lambda + \mu)c^2 - \lambda\mu a^2}{(1 + \lambda + \mu)^2} \qquad ②$$

推论 1 中的公式 ② 含有两个参数 λ 和 μ,通过对参数值的选取,可以分别计算出 $\triangle ABC$ 的顶点 A 与它的"五心"的距离.

(1) 若点 Q 为 $\triangle ABC$ 的重心,则 $\lambda = \frac{AD}{DC} = 1, \mu = \frac{AE}{EC} = 1$,代入公式 ② 得 $\triangle ABC$ 的顶点 A 到它的重心 G 的距离为

$$|AG| = \frac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

同理 $|BG| = \frac{1}{3}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}, |CG| = \frac{1}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

(2) 若点 Q 为 $\triangle ABC$ 的内心 I,则

$$\lambda = \frac{AD}{DC} = \frac{c}{a}, \mu = \frac{AE}{EC} = \frac{b}{a}$$

代入公式 ② 得 $\triangle ABC$ 的顶点 A 到它的内心 I 的距离为

$$|AI|^2 = \frac{\frac{c}{a}\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right)b^2 + \frac{b}{a}\left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right)c^2 - \frac{a^2bc}{a^2}}{\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)^2} =$$

$$\frac{bc(b + c)^2 - a^2bc}{(a + b + c)^2} = \frac{bc[(b + c)^2 - a^2]}{(a + b + c)^2} =$$

$$\frac{bc(-a + b + c)}{a + b + c} = \frac{bc(a + b + c - 2a)}{a + b + c} = bc - \frac{2abc}{a + b - c}$$

$$s = \frac{abc}{4R} = rp = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

又
$$\frac{abc}{a+b+c}=2Rr$$
所以
$$AI^2=bc-4Rr$$
所以
$$|AI|=\sqrt{\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c}}=\sqrt{bc-4Rr}$$
同理
$$|BI|=\sqrt{\frac{ac(a-b+c)}{a+b+c}}=\sqrt{ca-4Rr}$$
$$|CI|=\sqrt{\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}}=\sqrt{ab-4Rr}$$
(3) ⅰ 若点 Q 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁心 I_a 时，则
$$\lambda=\frac{AD}{DC}=-\frac{c}{a},\mu=\frac{AE}{EC}=-\frac{b}{a}$$
代入公式 ② 即得 $\triangle ABC$ 的顶点 A 到 $\angle A$ 内的旁心 I_a 的距离为
$$AI_a{}^2=\frac{b^2c(b+c)+bc^2(b+c)-a^2bc}{(a-b-c)^2}=$$
$$\frac{bc(b+c-a)(a+b+c)}{(-a+b+c)^2}=\frac{bc(a+b+c)}{-a+b+c}=$$
$$\frac{bc\cdot p}{p-a}=\frac{bc(p-a+a)}{p-a}=bc+\frac{abc}{p-a}=bc+\frac{4Rs}{p-a}$$
$$s=\frac{1}{2}r(-a+b+c)r_a=(p-a)r_a$$
所以
$$AI_a{}^2=bc+4Rr_a$$
所以
$$|AI_a|=\sqrt{\frac{bcp}{p-a}}=\sqrt{bc+4Rr_a}$$
ⅱ 当点 Q 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 内的旁心 I_b 时，则
$$\lambda=\frac{AD}{DC}=\frac{c}{a},\mu=\frac{AE}{EC}=-\frac{b}{a}$$
代入公式 ② 化简整理得
$$AI_b{}^2=\frac{c(c-b)b^2-b(c-b)c^2+a^2bc}{(a-b+c)^2}=\frac{bc[a^2-(b-c)^2]}{(a-b+c)^2}=$$
$$\frac{bc(a+b-c)}{a-b+c}=\frac{bc(p-c)}{p-b}$$
ⅲ 当点 Q 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 内的旁心 I_c 时，则
$$\lambda=\frac{AD}{DC}=-\frac{c}{a},\mu=\frac{AE}{EC}=-\frac{b}{a}$$
代入公式 ② 化简整理得

$$AI_c^2 = \frac{bc(p-b)}{p-c}$$

即有
$$|AI_a| = \sqrt{\frac{bcp}{p-a}} = \sqrt{bc + 4Rr_a}$$

$$|AI_b| = \sqrt{\frac{bc(p-c)}{p-b}},\ |AI_c| = \sqrt{\frac{bc(p-b)}{p-c}}$$

类似地还可得

$$|BI_a| = \sqrt{\frac{ca(p-c)}{p-a}},\ |BI_b| = \sqrt{\frac{cap}{p-b}} = \sqrt{ca + 4Rr_b},\ |BI_c| = \sqrt{\frac{ac(p-a)}{p-c}}$$

$$|CI_a| = \sqrt{\frac{ab(p-b)}{p-a}},\ |CI_b| = \sqrt{\frac{ab(p-a)}{p-b}},\ |CI_c| = \sqrt{\frac{abp}{p-c}} = \sqrt{ab + 4Rr_c}$$

(4) 若点 Q 为 $\triangle ABC$ 的垂心 H 时，对于非直角三角形，当

$$\lambda = AD/DC = c\cos A/a\cos C = (b^2 + a^2 - c^2)/(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\mu = AE/EC = b\cos A/a\cos B = (b^2 + c^2 - a^2)/(c^2 + a^2 - b^2)$$

得
$$1 + \lambda + \mu = \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 + a^2 - b^2)}$$

由海伦公式知上式分子等于 $\triangle ABC$ 的面积 S 的 16 倍，若记 $\delta = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$，则

$$\lambda = \frac{(\delta - a^2)}{(\delta - c^2)},\ \mu = \frac{(\delta - a^2)}{(\delta - b^2)},\ 1 + \lambda + \mu = \frac{4s}{(\delta - b^2)(\delta - c^2)}(\delta - b^2)$$

代入公式②的分子经计算可得

$$\lambda(\lambda + \mu)b^2 + \mu(\lambda + \mu)c^2 - \lambda\mu a^2 = \frac{4a^2(\delta - a^2)^2}{(\delta - b^2)(\delta - c^2)}$$

把此值和 $1 + \lambda + \mu$ 的值代入公式②整理得

$$AH^2 = \frac{a^2(\delta - a^2)^2(\delta - b^2)(\delta - c^2)s^2}{16s^4(\delta - b^2)^2(\delta - c^2)^2} = \frac{a^2(\delta - a^2)}{4s^2}$$

所以 $\triangle ABC$ 的顶点 A 到它的垂心 H 的距离为

$$|AH| = \frac{a(\delta - a^2)}{2s} = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{4s} = \frac{a \cdot 2bc\cos A}{2bc\sin A} =$$

$$a\cot A = a\sqrt{\csc^2 A - 1} = \sqrt{(a\csc A)^2 - a^2} = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

即
$$|AH| = 2R|\cos A| = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

同理
$$|BH| = 2R|\cos B| = \sqrt{4R^2 - b^2}$$

$$|CH| = 2R|\cos C| = \sqrt{4R^2 - c^2}$$

(5) 若点 Q 为 $\triangle ABC$ 的外心 O 时，则对于非直角三角形有

$$\lambda = \frac{AD}{DC} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}, \mu = \frac{AE}{EC} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

代入公式 ② 得

$$|AO|^2 = \frac{\sin 2C(\sin 2B + \sin 2C)b^2 + \sin 2B(\sin 2B + \sin 2C)c^2 - \sin 2B\sin 2C \cdot a^2}{(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)^2}$$

其中分子为

$$8R^2\sin B\sin C[(\sin 2B + \sin 2C)(\sin B\cos C + \cos B\sin C) - \sin^2 A\sin B\sin C] =$$
$$16R^2\sin^2 A\sin B\sin C[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = 16R^2\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$

分母为 $$16R^2\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$

所以 $$AO^2 = R^2$$

故 $$|AO| = |BO| = |CO| = R = \frac{abc}{4s}$$

推论 2 若点 Q 为 $\triangle ABC$ 的内心 I，则

$$\lambda = \frac{AD}{DC} = \frac{c}{a}, \mu = \frac{AE}{EC} = \frac{b}{a}$$

代入公式 ①，化简整理得

$$PI^2 = \frac{aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 - abc}{a + b + c} \quad ③$$

若记 $PI^2 = P(a, b, c)$，且用 I_a, I_b, I_c 分别表示 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 内的旁心，则

$$PI_a^2 = P(-a, b, c) = \frac{-aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 + abc}{-a + b + c} \quad ④$$

$$PI_b^2 = P(a, -b, c) = \frac{aPA^2 - bPB^2 + cPC^2 + abc}{a - b + c} \quad ⑤$$

$$PI_c^2 = P(a, b, -c) = \frac{aPA^2 + bPB^2 - cPC^2 + abc}{a + b - c} \quad ⑥$$

事实上，不妨当点 Q 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁心时，有

$$\lambda = \frac{AD}{DC} = -\frac{c}{a}$$

$$\mu = \frac{AE}{EC} = -\frac{b}{a} = \frac{-b}{a}$$

因此，代入公式 ① 中，相当于把公式 ③ 中 $-b$ 代替 b 而得.

于是有 $PI_a{}^2 = P(-a, b, c)$，同理可知其他二式成立.

(1) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的外心 O 时，有 $PA = PB = PC = R$.

ⅰ 由公式③,得

$$|OI|^2 = R - \frac{abc}{a+b+c} = R^2 - 2Rr$$

即

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

ⅱ 由公式④,得

$$|OI_a^2|^2 = \frac{R^2(-a+b+c)}{-a+b+c} + \frac{abc}{-a+b+c} = R^2 + \frac{abc}{-a+b+c} =$$

$$R^2 + \frac{4Rs}{p-a} = R^2 + 4Rr_a$$

即

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$$

同理可得

$$OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b$$

$$OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c$$

(2) 当点 P 分别为点 I_a, I_b, I_c 时,则由于 $AI^2 = bc - 4Rr, BI^2 = ca - 4Rr, CI^2 = ab - 4Rr$,代入公式④,得

$$II_a^2 = \frac{-a(bc-4R^2)+b(ca-4R^2)+c(ab-4R^2)+abc}{-a+b+c} =$$

$$-4R^2 + \frac{8Rs}{-(p-a)} = -4R^2 + 4Rr_a$$

即

$$II_a^2 = 4R(r_a - r)$$

同理可得

$$II_b^2 = 4R(r_b - r), II_c^2 = 4R(r_c - r)$$

(3) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心 G 时,则由推论1知

$$GA^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a)$$

$$GB^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2), GC^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

则

ⅰ 由公式③得

$$GI^2 = \frac{a(2b^2+2c^2-a^2)+b(2c^2+2a^2-b^2)+c(2a^2+2b^2-c^2)-9abc}{9(a+b+c)} =$$

$[2ab(a+b+c)+2bc(a+b+c)+2ca(a+b+c)-$

$(a^3+b^3+c^3-3abc)-18abc]/[9(a+b+c)] =$

$[(a+b+c)(2ab+2bc+2ca)-$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)-18abc]/[9(a+b+c)] =$

$$\frac{1}{3}(ab+bc+ca) - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{2abc}{a+b+c} =$$

$\frac{1}{3}(ab+bc+ca)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)-4Rr$

即 $$GI^2=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)-4Rr$$

ⅱ 由公式得

$$GI_a^2=[-a(2b^2+2c^2-a^2)+b(2c^2+2a^2-b^2)+c(2a^2+2b^2-c^2)+9abc]/[9(-a+b+c)=$$
$$\{(-2ab+2bc-2ca)(-a+b+c)-[(-a)^3+b^3+c^3-3(-a)bc]+18abc\}/[9(-a+b+c)]=$$
$$\frac{1}{3}(-ab+bc-ca)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)+4Rr_a$$

同理可得

$$GI_b^2=\frac{1}{3}(-ab-bc+ca)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)+4Rr_b$$

$$GI_c^2=\frac{1}{3}(ab-bc-ca)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)+4Rr_c$$

(4) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心 H 时,则由推论 1 得

$$HA^2=4R^2-a^2,HB^2=4R^2-b^2,HC^2=4R^2-c^2$$

ⅰ 由公式 ③ 得

$$HI^2=\frac{a(4R^2-a^2)+b(4R^2-b^2)+c(4R^2-c^2)-abc}{a+b+c}=$$
$$4R^2-\frac{a^3+b^3+c^3-3abc+4abc}{a+b+c}=$$
$$4R^2-(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+8Rr=$$
$$4R^2+8Rr-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ca$$

ⅱ 由公式 ④、⑤ 分别得

$$HG^2=4R^2-\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)$$

$$HI_a^2=\frac{-a(4R^2-a^2)+b(4R^2-b^2)+c(4R^2-c^2)+abc}{-a+b+c}=$$
$$4R^2-\frac{(-a)^3+b^3+c^3-3(-a)bc-4abc}{-a+b+c}=$$
$$4R^2+8Rr_a-a^2-b^2-c^2-ab+bc-ca$$

同理可得

$$HI_b^2=4R^2+8Rr_b-a^2-b^2-c^2-ab-bc+ca$$

$$HI_c^2 = 4R^2 + 8Rr_c - a^2 - b^2 - c^2 + ab - bc - ca$$

推论 3 当点 Q 为 $\triangle ABC$ 的重心 G 时，则由 $\lambda = 1, \mu = 1$ 代入公式 ① 得

$$PG^2 = \frac{1}{3}(PA^2 + PB^2 + PC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \quad ⑦$$

(1) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的外心 O 时，$OA = OB = OC = R$，则由公式 ⑦，得

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(2) 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心 H 时，由推论 1 知

$$HA^2 = 4R^2 - a^2, HB^2 = 4R^2 - b^2, HC^2 = 4R^2 - c^2$$

代入公式 ⑦ 得

$$HG^2 = \frac{1}{3}(HA^2 + HB^2 + HC^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) =$$

$$\frac{1}{3}[(4R^2 - a^2) + (4R^2 - b^2) + (4R^2 - c^2)] -$$

$$\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

所以
$$HG^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

推论 4 当点 Q 为 $\triangle ABC$ 的外心 O 时，则 $\lambda = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}, \mu = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$，代入公式 ② 得

$$PO^2 = \frac{\sin 2A \cdot PA^2 + \sin 2B \cdot PB^2 + \sin 2C \cdot PC^2}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} - \frac{a^2\sin 2B\sin 2C + b^2\sin 2C\sin 2A + c^2\sin 2A\sin 2B}{(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)^2}$$

其中后一部分的分子为

$16R^2\sin A\sin B\sin C(\sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C) =$

$16R^2\sin A\sin B\sin C[\cos C(\sin A\cos B + \cos A\sin B) + \cos A\cos B\sin C] =$

$16R^2\sin A\sin B\sin C[\cos A\cos B - \cos(A + B)] =$

$16R^2\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$

分母为
$$16\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$

所以
$$PO^2 = \frac{\sin 2A \cdot PA^2 + \sin 2B \cdot PB^2 + \sin 2C \cdot PC^2}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} - R^2$$

在此基础上，当点 P 为 $\triangle ABC$ 的垂心 H 时，由推论 1 知

$$HA^2 = 4R^2 - a^2, HB^2 = 4R^2 - b^2, HC^2 = 4R^2 - c^2$$

代入公式，得

$$HO^2=\frac{(4R^2-a^2)\sin 2A+(4R^2-b^2)\sin 2B+(4R^2-c^2)\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}-R^2=$$

$$3R^2-\frac{a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

其中上式中

$$a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C=$$

$$4R^2\cdot\frac{1-\cos 2A}{2}\cdot\sin 2A+4R^2\cdot\frac{1-\cos 2B}{2}\cdot\sin 2B+$$

$$4R^2\cdot\frac{1-\cos 2C}{2}\cdot\sin 2C=$$

$$2R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)-R^2(\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C)=$$

$$2R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)+4R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C$$

又 $$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

代入上式，化简整理，得

$$HO^2=R^2-8R^2\cos A\cos B\cos C$$

推论 5 利用三角形的旁心定义及推论 1 知

$$I_bI_c^2=(AI_b+AI_c)^2=\left[\sqrt{\frac{bc(p-c)}{p-b}}+\sqrt{\frac{bc(p-b)}{p-c}}\right]^2=\frac{a^2bc}{(p-b)(p-c)}$$

即 $$I_bI_c^2=\frac{a^2bc}{(p-b)(p-c)}$$

同理可得 $$I_cI_a^2=\frac{ab^2c}{(p-c)(p-a)},I_aI_b^2=\frac{abc^2}{(p-a)(p-b)}$$

至此，我们一气呵成，将三角形的五心，即外心 O，垂心 H，重心 G，内心 I，三个旁心 I_a,I_b,I_c 共七个点间21个距离计算公式推导出来了．在推导这些公式的过程中，有的并不简单，但实际上，若能利用前面第一章第六节中定理 11，还可以有简便解法．如：在已求得 OI,GH,IG 后，若利用关系式 $4OI^2+2IH^2=3GH^2+6IG^2$ 求 IH 会更简便些．

下面举例说明这些公式的运用．

例 3.1 若 I,a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的内心及三边长，则

$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$$

证明 由推论 1 知

$$IA^2=\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c},IB^2=\frac{ca(a-b+c)}{a+b+c},IC^2=\frac{ab(a+b-c)}{a+b+c}$$

故 $$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=\frac{-a+b+c}{a+b+c}+\frac{a-b+c}{a+b+c}+\frac{a+b-c}{a+b+c}=1$$

例 3.2 在 $\triangle ABC$ 中,求证:$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$.

证明 由公式

$$HO^2=R^2-8R^2\cos A\cos B\cos C\geqslant 0$$

得 $$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$$

等号当且仅当 $HO=0$,即垂心 H 与外心 O 重合时成立,亦即 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

说明 由以上讨论可知:三角形的顶点到它的垂心、外心、重心、内心、旁心的距离以及这五心之间的距离都可以统一于公式①中.因此,公式①是一个具有普通意义的恒等式,利用这个恒等式及以上各公式,还可以得到许多关于三角形及其垂足三角形、旁心三角形的有关元素的恒等式和不等式.

例 3.3 若点 O,I,I_a,I_b,I_c 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、内心及其旁心,R,r,r_a,r_b,r_c 为其相应的圆的半径,则

$$IO^2+I_aO^2+I_bO^2+I_cO^2=12R^2$$

证明 $IO^2+I_aO^2+I_bO^2+I_cO^2=$

$R^2-2Rr+R^2+2Rr_a+R^2+2Rr_b+R^2+2Rr_c=$

$4R^2+2R(r_a+r_b+r_c-r)=4R^2+2R\cdot 4R=12R^2$

所以命题成立.

例 3.4 条件同例 3.3,求证:$\frac{II_a^2}{a}+\frac{II_b^2}{b}+\frac{II_c^2}{c}=\frac{4R(4R+r)}{p}$.

证明 $\frac{II_a^2}{a}+\frac{II_b^2}{b}+\frac{II_c^2}{c}=\frac{abc}{p(p-a)}+\frac{abc}{p(p-b)}+\frac{abc}{p(p-c)}=$

$\frac{abc}{p}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=$

$\frac{abc}{ps}\left(\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}\right)=$

$\frac{4Rs}{ps}(r_a+r_b+r_c)=\frac{4R(4R+r)}{p}$

例 3.5 在 $\triangle ABC$ 中,内心与垂心的距离等于内心与外心的距离的充要条件是三内角成等差数列.

证明 不妨设 $\angle A,\angle B,\angle C$ 成等差数列,则 $\angle B=60^\circ$,且 $a^2+c^2-ac=b^2$,$b=2R\sin 60^\circ=\sqrt{3}R$,则由公式

$$HI^2 = 4R^2 - 2Rr - \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = 4R^2 - 2Rr - \frac{(a+c)(a^2-ac+c^2)+b^3}{a+b+c} =$$

$$4R^2 - 2Rr - \frac{b^2(a+c)+b^3}{a+b+c} = 4R^2 - 2Rr - b^2 = R^2 - 2Rr$$

所以 $HI^2 = IO^2$，由此得 $HI = IO$.

反之，若 $HI = IO$，则

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = 3R^2$$

由正弦定理得

$$(3\sin A - 4\sin^3 A) + (3\sin B - 4\sin^3 B) + (3\sin C - 4\sin^3 C) = 0$$

即
$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$$

即
$$\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0$$

故 $\angle A, \angle B, \angle C$ 中至少有一个角为 $60°$，即三内角成等差数列.

例 3.6 (1998 年 CMO 试题) 在一个非钝角 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，$\angle B = 45°$，O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心，且 $\sqrt{2}OI = AB - AC$，求 $\sin A$.

解法 1 设 $\triangle ABC$ 外接圆和内切圆半径分别为 R, r，$\angle A, \angle B$ 及 $\angle C$ 所对边分别为 a, b, c. 那么，由已知条件 $OI = \frac{c-b}{\sqrt{2}}$，再结合欧拉定理 $OI^2 = R^2 - 2Rr$，可得

$$\left(\frac{c-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = R^2 - 2Rr \quad ①$$

再由熟知的几何关系得

$$r = \frac{1}{2}(c+a-b)\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(c+a-b)\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(c+a-b) \quad ②$$

由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad ③$$

结合 ①，②，③ 可得

$$\left(\frac{2R\sin C - 2R\sin B}{\sqrt{2}}\right)^2 = R^2 - 2Rr =$$

$$R^2 - 2R \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}(2R\sin A + 2R\sin C - 2R\sin B)$$

整理得 $1 - 2(\sin C - \sin B)^2 = 2(\sqrt{2}-1)(\sin A + \sin C + \sin B)$

因为 $\angle B=\frac{\pi}{4}$，$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且

$$\sin C=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\angle A\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A+\sin A)$$

所以
$$2\sin A\cos A-(2-\sqrt{2})\sin A-\sqrt{2}\cos A+\sqrt{2}-1=0$$
$$(\sqrt{2}\sin A-1)(\sqrt{2}\cos A-\sqrt{2}+1)=0$$

于是
$$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ 或 }\cos A=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

当 $\cos A=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$$

综上
$$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ 或 }\sin A=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$$

解法2 过点 I 作 $II_c\perp AB$，$II_b\perp AC$，$II_a\perp BC$，$OD\perp BC$，其中 I_c，I_b，I_a，D 均为垂足，则 D 为线段 BC 中点，且 I_c，I_b，I_a 也分别为圆 I 与边 AB，AC，BC 的切点．由已知条件

$$\sqrt{2}OI=AB-AC=(AI_c-I_cB)-(AI_c+I_bC)=I_cB-I_bC=I_aB-I_aC$$

由 $AB>AC$ 知 $I_aB>I_aC$，故点 D 在线段 I_aB 上．又因为

$$I_aB=\frac{1}{2}BC+I_aD,\ I_aC=\frac{1}{2}BC-I_aD$$

所以 $\sqrt{2}OI=2I_aD$，即 $OI=\sqrt{2}I_aD$，所以直线 OI 与直线 BC 的夹角必为 $\frac{\pi}{4}$．又因为 $\angle B=\frac{\pi}{4}$，所以有且仅有 $OI\perp AB$ 或 $OI\,/\!/\,AB$．

下面针对这两种情况进行讨论．

ⅰ 当 $OI\perp AB$ 时，I_a 为线段 AB 中点，所以 $AI_c=BI_c$，所以

$$\frac{1}{2}(AB+AC-BC)=\frac{1}{2}(AB+BC-AC)$$

于是 $AC=BC$，$\triangle ABC$ 为以 AB 为斜边的等腰直角三角形，$\angle A=\angle B=\frac{\pi}{4}$，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，点 O 与 I_c 重合，如图 3.2 所示．

ⅱ 当 $OI\,/\!/\,AB$ 时，作 $OE\perp AB$，E 为垂足，如图 3.3 所示．

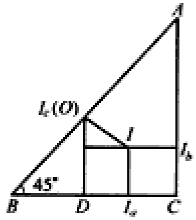


图 3.2

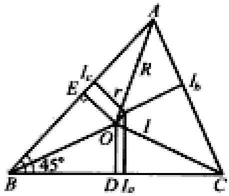


图 3.3

则 $$II_c = OE = r, \angle BOE = \angle AOE = \angle C$$

所以 $$R\cos C = r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

所以 $$\cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\sin\frac{\pi}{8}\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right) =$$
$$2\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2}\right) =$$
$$2\sin\frac{\pi}{8}\left[-\sin\frac{\pi}{8} + \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \angle C\right)\right] =$$
$$\cos\frac{\pi}{4} - 1 + 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{3\pi}{8} - \angle C\right) =$$
$$\cos\frac{\pi}{4} - 1 + \cos C + \sin\left(\angle C - \frac{\pi}{4}\right)$$

所以 $$\sin\left(\angle C - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于 $0 \leqslant \angle C - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$,所以

$$\angle C - \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\angle C = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\angle A = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

于是 $\sin A = \cos\left[\arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$

综上可知:$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$.

练习 9

1. 求证：(1) $\frac{AI_a \cdot BI_b}{AI \cdot BI}+\frac{BI_b \cdot CI_c}{BI \cdot CI}+\frac{CI_c \cdot AI_a}{CI \cdot AI}=\frac{p}{r}$.

(2) $\frac{AI \cdot BI}{AI_a \cdot BI_b}+\frac{BI \cdot CI}{BI_b \cdot CI_c}+\frac{CI \cdot AI}{CI_c \cdot AI_a}=\frac{4R+r}{p}$.

2. 求证：$AI \cdot BI \cdot CI=4Rr^2$.

3. 求证：$\frac{bc}{AI^2}+\frac{ca}{BI^2}+\frac{ab}{CI^2}=\frac{4R+r}{r}$.

第4章 圆内接四边形中三角形的五心性质及应用

在本章,我们将要讨论圆内接四边形中三角形五心的性质,首先讨论圆内接四边形中,顶点在圆上的三角形的五心性质及其应用.

定理1 圆内接四边形四顶点组成的四个三角形外心共点于原四边形的外心.

本定理显然成立,表明这四个三角形的外接圆与四边形的外接圆是同一个圆.因此,圆心与半径都相同或相等.

定理2 圆内接四边形的垂心构成的四边形(简称垂心四边形)也内接于圆,并且此两四边形互为垂心四边形.

本定理的前一部分,就是1992年全国高中数学联赛加试试题,在前面,运用三角形的垂心定理11已证明过,这里从略.下面证明后一部分.

事实上,如图4.1所示,若四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形,H_1,H_2,H_3,H_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4,\triangle A_3A_4A_1,\triangle A_4A_1A_2,\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心,则

$$H_2A_1\perp A_3A_4,A_3A_4\mathrel{/\!/}H_3H_4$$

所以

$$H_2A_1\perp H_3H_4$$

又 $H_3A_1\perp A_2A_4,A_2A_4\mathrel{/\!/}H_2H_4\Rightarrow H_3A_1\perp H_2H_4$,从而 A_1 为 $\triangle H_2H_3H_4$ 之垂心.

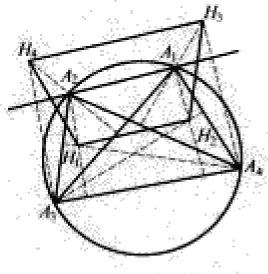


图4.1

同样可证 A_2,A_3,A_4 分别为 $\triangle H_1H_3H_4$,$\triangle H_1H_2H_4$,$\triangle H_1H_2H_3$ 之垂心.

这就证明了圆内接四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 的垂心四边形恰是 $A_1A_2A_3A_4$.

定理3 圆内接四边形四顶点组成的四个三角形重心构成的四边形与原四边形相似.

证明 如图4.2,设 G_1,G_2,G_3,G_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4,\triangle A_3A_4A_1$,$\triangle A_4A_1A_2,\triangle A_1A_2A_3$ 的重心,E 为 A_3A_4 中点,联结 A_1E,A_2E,则 G_1 在 A_2E 上,G_2 在 A_1E 上,于是在 $\triangle A_1EA_2$ 中

$$G_1G_2 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_1A_2$$

同理

$$G_2G_2 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_2A_3,\ G_3G_4 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_3A_4,\ G_4G_1 \underline{\parallel} \frac{1}{3}A_4A_1$$

由 $G_2G_3 /\!/ A_2A_3$ 与 $G_3G_4 /\!/ A_3A_4$ 知

$$\angle G_2G_3G_4 = \angle A_2A_3A_4$$

同理 $\angle G_1G_2G_3 = \angle A_1A_2A_3$，$\angle G_3G_4G_1 = \angle A_3A_4A_1$，$\angle G_4G_1G_2 = \angle A_4A_1A_2$.

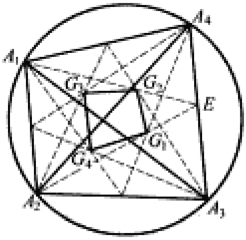


图 4.2

故四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 相似，且相似比为 1 : 3.

定理 4　圆内接四边形一条对角线分成的两个三角形的内心与此对角线两端点的连线交圆于四点，相对两点的连线互相垂直.

证明　如图 4.3，若 I_1, I_2 分别为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_4A_1A_2$ 的内心，Q, N, P, M 分别为 $A_4I_1, A_2I_1, A_2I_2, A_4I_2$ 与其外接圆的交点，则 Q, N, P, M 分别为 $\overset{\frown}{A_3A_2}, \overset{\frown}{A_3A_4}, \overset{\frown}{A_4A_1}, \overset{\frown}{A_1A_2}$ 的中点，联结 PM，则

$$\angle MPQ = \frac{1}{2}\angle A_1A_4A_3,\ \angle PMN = \frac{1}{2}\angle A_1A_2A_3$$

又 $$\angle A_1A_4A_3 + \angle A_1A_2A_3 = 180^\circ$$

所以 $$\angle MPQ + \angle PMN = 90^\circ$$

从而 $$MN \perp PQ$$

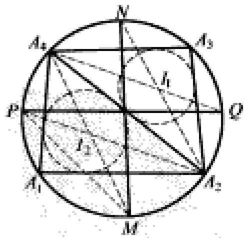


图 4.3

定理 5　圆内接四边形四顶点组成的两相交三角形的内心与共切边所对弧的中点构成等腰三角形，且两内心连线为底边.

证明　如图 4.4，若 I_1, I_2 分别为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$ 的内心，P 为 $\overset{\frown}{A_3A_4}$ 的中点，则点 P 同时在 A_2I_1 与 A_1I_2 上，利用三角形内心定理 4 知

在 $\triangle A_2A_3A_4$ 中，$PI_2 = PA_3 = PA_4$；

在 $\triangle A_3A_4A_1$ 中，$PI_1 = PA_3 = PA_4$.

所以 $PI_1 = PI_2$.

于是 $\triangle PI_1I_2$ 为等腰三角形，且 I_1I_2 为底边.

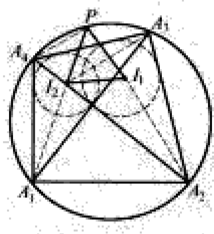


图 4.4

定理 6　对角线不垂直的圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的各顶点分别向不过该

顶点的对角线引垂线，记其垂足分别为 B_1, B_2, B_3, B_4，则四边形 $A_1A_2A_3A_4 \backsim$ 四边形 $B_1B_2B_3B_4$.

证明 如图 4.5，设 A_1A_3 与 A_2A_4 相交于点 P，由已知条件易知：A_1B_1 与 A_2B_2 分别为 $\triangle A_1B_1B_2$ 的两条高，由三角形垂心性质知

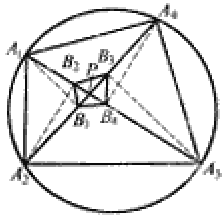


图 4.5

$$\triangle PB_1B_2 \backsim \triangle PA_1A_2$$

同理 $$\triangle PB_3B_4 \backsim \triangle PA_3A_4$$

又 $$\triangle PA_1A_2 \backsim \triangle PA_3A_4$$

所以 $\triangle PB_1B_2 \backsim \triangle PA_1A_2 \backsim \triangle PB_3B_4 \backsim \triangle PA_3A_4$

所以 $PB_1 \cdot PA_1 = PB_2 \cdot PA_2 = PB_3 \cdot PA_3 = PB_4 \cdot PA_4$

由此可得 $$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_4A_1} = \frac{B_3B_4}{A_3A_4} = \frac{B_4B_1}{A_2A_3}$$

且 A_1, B_2, B_3, A_4 与 A_2, B_1, B_4, A_3 分别四点共圆，由此可得四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的对应角相等，故四边形 $A_1A_2A_3A_4 \backsim$ 四边形 $B_1B_2B_3B_4$.

在此定理的基础上，进一步可得：

定理 7 若以圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的各边为弦作四个圆，则这四个圆所交四个点连成一个圆内接四边形.

证明 如图 4.6，记以 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ 为弦所作圆的交点依次为 B_2, B_3, B_4, B_1，联结 A_2B_2 并延长至 C_2 与 A_4B_4 至 C_4，则由圆内接四边形的外角定理，知

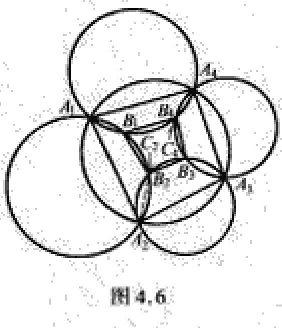


图 4.6

$$\angle C_2B_2B_3 = \angle B_3A_3A_2, \angle C_2B_2B_1 = \angle B_1A_1A_2$$

$$\angle C_4B_4B_3 = \angle B_3A_3A_4, \angle C_4B_4B_1 = \angle B_1A_1A_4$$

这四个式子同向相加，得

$$\angle B_1B_2B_3 + \angle B_1B_4B_3 = \angle A_2A_1A_4 + \angle A_4A_3A_2 = \pi$$

所以 B_1, B_2, B_3, B_4 四点共圆.

定理 8 （1986 年中国国家集训队考试试题）若 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆内接四边形，I_1, I_2, I_3, I_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4, \triangle A_1A_3A_4, \triangle A_1A_2A_4, \triangle A_1A_2A_3$ 的内心，则内心四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 也内接于圆.

证明 如图 4.7，设各弧段 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ 的中点依次为 B_1, B_2, B_3, B_4，联结 B_1B_3 与 B_2B_4 相交于点 I，则定理 4 知 $B_1B_3 \perp B_2B_4$.

由定理5知：$B_4I_2 = B_4I_3$，又 B_2B_4 平分 $\angle I_2B_4I_3$，所以 $I_2I_3 \perp B_2B_4$，所以 $I_2I_3 \parallel B_1B_3$，同理 $I_1I_4 \parallel B_1B_3$，$I_3I_4 \parallel B_2B_4 \parallel I_1I_2$.

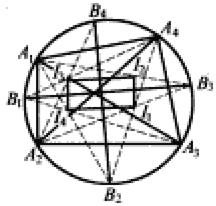


图 4.7

所以四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 为矩形，内接于圆.

定理 9 圆内接四边形四顶点组成的四个三角形的内心、旁心共计十六点，分配在八条直线上，每线上四点，而这八条直线是互相垂直的两组平行线，每组含四条直线.

这个定理称为 Fuhrmann 定理.

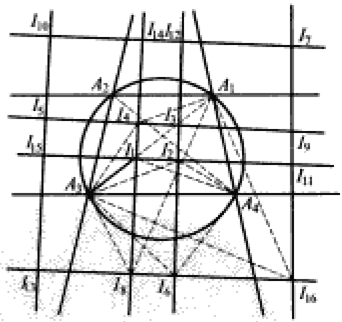


图 4.8

证明 如图4.8，设 I_1, I_2, I_3, I_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的内心，则由定理8知：四边形 $I_1I_2I_3I_4$ 为矩形，又由三角形内心定理2知

$$\angle A_2I_1A_3 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A_3A_2A_4 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A_3A_1A_4 = \angle A_3I_2A_4$$

所以 A_3, I_1, I_2, A_4 四点共圆.

又设 I_5, I_6, I_7 分别为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的 A_2A_3 边，A_3A_4 边，A_4A_2 边上的旁心；I_8, I_9, I_{10} 分别为 $\triangle A_3A_4A_1$ 的 A_3A_4 边，A_4A_1 边，A_1A_3 边上的旁心；I_{11}, I_{12}, I_{13} 分别为 $\triangle A_4A_1A_2$ 的 A_4A_1 边，A_1A_2 边，A_2A_4 边上的旁心；I_{14}, I_{15}, I_{16} 分别为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的 A_1A_2 边，A_2A_3 边，A_3A_1 边上的旁心.

则由三角形的定理10知：A_3, I_1, A_4, I_6 与 A_3, I_2, A_4, I_8 分别四点共圆，从而 $A_3, I_1, I_2, A_4, I_6, I_8$ 六点共圆. 因为

$$\angle I_1I_2I_6 = \angle I_1A_4I_6 = 90^\circ$$

所以 I_3, I_2, I_6 三点共线.

同理 I_2, I_3, I_{12} 三点共线，所以 I_6, I_2, I_3, I_{12} 四点共线，仿上知：I_8, I_1, I_4, I_{14} 四点共线，且 $I_8I_{14} \parallel I_6I_{12}$.

同理可知：A_3, I_{16}, A_1, I_4 与 A_3, I_8, A_1, I_4，分别四点共圆，所以 $A_3, I_8, I_{16}, A_1, I_4$，五点共圆，所以

$$\angle I_4I_8I_{16} = \angle I_4A_3I_{16} = 90^\circ$$

又已证 I_1, I_2, I_6, I_8 四点共圆，所以

$$\angle I_4I_8I_6 = \angle I_4I_3I_6 = 90°$$

所以 I_8, I_6, I_{16} 三点共线，且 $I_1I_2I_6I_8$ 为矩形，$I_6I_8 \parallel I_1I_2$.

同理可证：I_6, I_8, I_{13} 三点共线，因此，I_{16}, I_6, I_8, I_{13} 四点共线.

仿上还可证：I_{11}, I_2, I_1, I_{15} 与 I_9, I_3, I_4, I_5 分别四点共线；I_{16}, I_{11}, I_9, I_7；$I_{13}, I_{15}, I_5, I_{10}$；$I_{10}, I_{14}, I_{12}, I_7$ 分别四点共线.

故定理得证.

定理 10 圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，设 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的内心分别记为 I_1, I_2, I_3, I_4；其内切圆半径分别为 r_1, r_2, r_3, r_4；边 $A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, A_1A_2$ 上的切点依次是 E, F, M, N, G, H, P, Q，则

(1) $EF = GH, MN = PQ$.

(2) $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

(3) $|r_1 - r_2| = |r_3 - r_4|, |r_1 - r_4| = |r_2 - r_3|$.

(4) $I_1O^2 + I_3O^2 = I_2O^2 + I_4O^2$.

证明 为了证明定理 10，先如图 4.9 所设，利用三角形内切圆半径计算公式，得

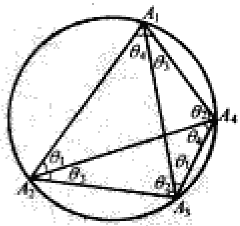


图 4.9

$$r_1 = 4R\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} =$$

$$4R\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right) =$$

$$4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\left(\cot\frac{\theta_1}{2}+\cot\frac{\theta_2}{2}\right)$$

同理

$$r_2 = 4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_4}{2} = 4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\left(\cot\frac{\theta_2}{2}+\cot\frac{\theta_4}{2}\right)$$

$$r_3 = 4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3+\theta_4}{2} = 4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\left(\cot\frac{\theta_3}{2}+\cot\frac{\theta_4}{2}\right)$$

$$r_4 = 4R\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2} = 4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\left(\cot\frac{\theta_1}{2}+\cot\frac{\theta_3}{2}\right)$$

下面证明定理 10：如图 4.10

$$(1)\ A_2E = \frac{r_4}{\tan\frac{\theta_1+\theta_3}{2}} = 4R\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\tan\frac{\theta_1+\theta_3}{2}} =$$

$$4R\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}$$

同理 $A_3F = 4R\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

所以 $EF = A_2A_3 - A_2E - A_3F = 2R\sin\theta_4 =$

$$4R\sin\frac{\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}$$

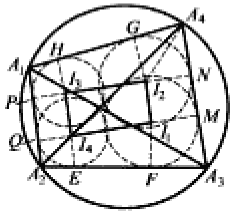


图 4.10

所以

$$EF = AB - A_2E - A_3F =$$

$$4R\sin\frac{\theta_4}{2}\left[\cos\frac{\theta_4}{2} - \sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} - \sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] =$$

$$4R\sin\frac{\theta_4}{2}\left[\cos\frac{\pi-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}{2} - \sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} - \sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] =$$

$$4R\sin\frac{\theta_4}{2}\left[\sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \cos\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} - \sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] =$$

$$4R\sin\frac{\theta_4}{2}\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta_3}{2}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + \cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right) - \\ \sin\frac{\theta_2}{2}\left(\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_3}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\right)\end{bmatrix} =$$

$$4R\sin\frac{\theta_4}{2}\left[\sin\frac{\theta_1}{2}\left(\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2} - \sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\right)\right] =$$

$$4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}$$

同理可得 $GH = 4R\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}$

$$MN = PQ = 4R\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_4}{2}$$

所以 $EF = GH, MN = PQ$

利用 r_1, r_2, r_3, r_4 的值,显然(2)、(3) 成立.

(4) 由欧拉公式,得

$$I_1O^2 = R^2 - 2Rr_1, I_2O^2 = R^2 - 2Rr_2, I_3O^2 = R^2 - 2Rr_3, I_4O^2 = R^2 - 2Rr_4$$

所以 $I_1O^2 + I_3O^2 = 2R^2 - 2R(r_1 + r_3)$

$$I_2O^2 + I_4O^2 = 2R^2 - 2R(r_2 + r_4)$$

又
$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

所以
$$I_1O^2 + I_3O^2 = I_2O^2 + I_4O^2$$

定理 11 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆 O，$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 中，$\angle A_2A_3A_4$，$\angle A_3A_4A_1$，$\angle A_4A_1A_2$，$\angle A_1A_2A_3$ 内的旁切圆的圆心分别为 I_1, I_2, I_3, I_4，半径分别为 r_1, r_2, r_3, r_4，则

(1) $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

(2) $|r_1 - r_2| = |r_3 - r_4|$，$|r_1 - r_4| = |r_2 - r_3|$.

(3) $I_1O^2 + I_3O^2 = I_2O^2 + I_4O^2$.

证明 先看图 4.11，并利用三角形旁切圆半径计算公式，可得

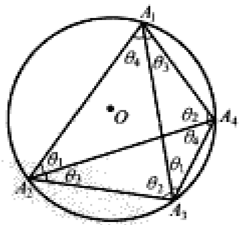


图 4.11

$$r_1 = 4R\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4}{2} =$$
$$4R\cos\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right) =$$
$$4R\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}\left(\tan\frac{\theta_1}{2}+\tan\frac{\theta_2}{2}\right)$$

同理得

$$r_2 = 4R\sin\frac{\theta_2+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_3}{2} = 4R\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}\left(\tan\frac{\theta_2}{2}+\tan\frac{\theta_4}{2}\right)$$
$$r_3 = 4R\sin\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} = 4R\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}\left(\tan\frac{\theta_3}{2}+\tan\frac{\theta_4}{2}\right)$$
$$r_4 = 4R\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_4}{2} = 4R\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4}{2}\left(\tan\frac{\theta_1}{2}+\tan\frac{\theta_3}{2}\right)$$

把以上各值代入(1)、(2)中，显然成立.

(3) 由欧拉公式，得

$$I_1O^2 = R^2 + 2Rr_1, I_2O^2 = R^2 + 2Rr_2$$
$$I_3O^2 = R^2 + 2Rr_3, I_4O^2 = R^2 + 2Rr_4$$

所以
$$I_1O^2 + I_3O^2 = 2R^2 + 2R(r_1 + r_3)$$
$$I_2O^2 + I_4O^2 = 2R^2 + 2R(r_2 + r_4)$$

又
$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

所以
$$I_1O^2 + I_3O^2 = I_2O^2 + I_4O^2$$

定理 12 若 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆 O，G_1 和 H_1，G_2 和 H_2，G_3 和 H_3，G_4 和 H_4

依次为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的重心和垂心，则

（1）四边形 $G_1G_2G_3G_4$，$H_1H_2H_3H_4$ 均内接于圆 O_1，O_2.

（2）三个圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$，$G_1G_2G_3G_4$，$H_1H_2H_3H_4$ 彼此互相位似，且四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O，重心 G_0，垂心 H_0，O_1，O_2 共线，满足 $OG_0:G_0O_1:O_1H_0:H_0O_2=3:1:2:6$.

证明　（2）如图 4.12，由定理 2，定理 3 知显然成立.

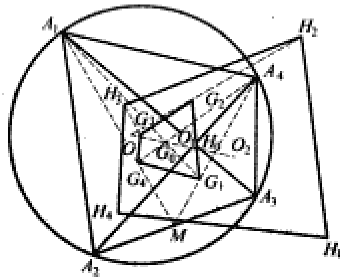


图 4.12

（2）先证 O，G_0，O_1 三点共线. 设 A_1G_1，A_4G_4 相交于 G_0，联结 A_1G_4 交 A_2A_3 于点 M，则 M 为 A_2A_3 中点，联结 A_4M，则 G_1 在 A_4M 上.

由于直线 $A_4G_0G_4$ 截 $\triangle A_1MG_1$ 的三边于 G_0，G_4，A_4，则利用梅涅劳斯定理，得

$$\frac{G_1G_0}{G_0A_1}\cdot\frac{A_1G_4}{G_4M}\cdot\frac{MA_4}{A_4G_1}=1$$

由三角形重心性质知：$\frac{A_1G_4}{G_4M}=\frac{2}{1}$，$\frac{MA_4}{A_4G_1}=\frac{3}{2}$，由此得 $\frac{G_1G_0}{G_0A_1}=\frac{1}{3}$，同理，$\frac{G_4G_0}{G_0A_4}=\frac{1}{3}$.

即 A_1G_1 通过 A_4G_4 上一定点 G_0，且被 G_0 分成 1 : 3 的比.

同法可证 A_2G_2，A_3G_3 都通过 A_4G_4 上一定点 G_0，且被 G_0 分成 1 : 3 的比，从而有

ⅰ　A_1G_1，A_2G_2，A_3G_3 都通过同一点 G_0.

ⅱ　$\frac{G_0G_1}{G_0A_1}=\frac{G_0G_2}{G_0A_2}=\frac{G_0G_3}{G_0A_3}=\frac{G_0G_4}{G_0A_4}=\frac{1}{3}$.

所以四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 与 $A_1A_2A_3A_4$ 成位似，位似中心是 G_0，位似比为 $k_1=\frac{1}{3}$，对应点都在位似中心两旁，它们互相成内位似. 又两圆心 O 和 O_1 是在此位似变换中的一对对应点. 由于在位似变换中，对立点连线必过位似中心，所以 O，G_0，O_1 三点共线，联结 OG_0，在 OG_0 延长线上取点 O_1，使 $G_0O_1=\frac{1}{3}OG_0$，则点 O_1 就是四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 的圆心.

下面再证 O_2，H_0 也在直线 OO_1 上，且

$$OG_0:G_0O_1:O_1H_0:H_0O_2=3:1:2:6$$

由欧拉线定理及已知条件,得 $O,G_i,H_i(i=1,2,3,4)$ 共线,且分别是题设四个三角形的欧拉线,因此,四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 与四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 对应点连线经过同一点 O,且 $\frac{OH_i}{OG_i}(i=1,2,3,4)=3$,所以,这两个四边形形成外位似(即对应点在位似中心两旁),位似中心为 O,位似比 $k_2=3$,又 O_2 与 O_1 是此位似变换中的对应点,则 O_1O_2 连线必过位似中心 O,于是在 OO_1 延长线上取 $OO_2=3OO_1$,则 O_2 为四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 的圆心,再由位似变换不传递性知:四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 也成位似,位似比为 $k=k_1k_2=3\times\frac{1}{3}=1$.由此可见,三个圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4,H_1H_2H_3H_4,G_1G_2G_3G_4$ 彼此互相位似,三圆心 O,O_2,O_1 共线,且 $OO_1:O_1O_2=1:2$.

再由于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $H_1H_2H_3H_4$ 成位似,则对应点连线 $A_iH_i(i=1,2,3,4)$ 四线段共点于位似中心(记为 H_0),又由于位似比为1,所以 H_0 必为对应点 O,O_2 连线段中点,即 $OH_0=\frac{1}{2}OO_2$,因此,若分别把 O,G_0,H_0 叫做四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心、重心和垂心,则综上可知:G_0 为 OH_0 的中点,四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O,重心 G_0,垂心 H_0,O_1,O_2 五点共线,且由计算可得

$$OG_0:G_0O_1:O_1H_0:H_0O_2=3:1:2:6$$

以上讨论了圆内接四边形中,顶点在圆上的三角形的五心性质,下面接着讨论圆内接四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 P 所构成的 $\triangle PAB$,$\triangle PBC$,$\triangle PCD$,$\triangle PDA$ 的五心性质;特殊的圆内接四边形,即为对角线互相垂直与双圆四边形以及将对边形延长后分别相交于一点,所构成的三角形的五心性质.然后再举例阐述这些知识的应用.

定理13 过圆内接四边形 $ABCD$ 两对角线交点 P 作任一边的垂线,则垂线必过以其对边为一边,以交点为一顶点的三角形的外心,反之亦然.

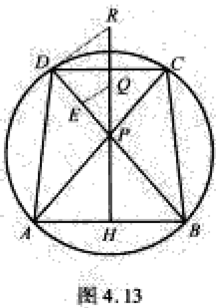


图 4.13

证明 如图 4.13,过 P 作 $PH\perp AB$ 于 H,作 DP 的中垂线交 HP 于 Q,交 DP 于 E,过 D 作 $DR\parallel EQ$,交 HP 于 R,则 $DR\perp DP$,Q 为 PR 的中点,由于

$$\angle ORP=\angle EQP=90^\circ-\angle EPQ=90^\circ-\angle HPB=\angle PBH=\angle ACD=\angle DCP$$

知 D,P,C,R 四点共圆,又 $\angle PDR$ 为直角.

所以 Q 为 $\triangle CDP$ 的外心.

反之,设 Q 为 $\triangle CDP$ 的外心,过 P,D 分别作 AB,DP 的垂线 PH 交 AB 于 H,交 DR 于 R,则由 $\angle DCP=\angle PBH$ 知 D,P,C,R 四点共圆,且 PR 为直径.

所以 Q 在 PR 上,即 $QP\perp AB$.

综上知定理得证.

定理 14 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 P,则 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$,$\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 的垂心、外心分别四点共圆.

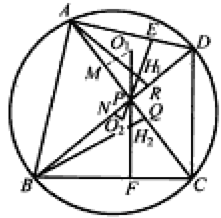


图 4.14

证明 如图 4.14,设 O_1 与 H_1,O_2 与 H_2 分别为 $\triangle PAD$,$\triangle PBC$ 的外心与垂心,由定理13知:O_1,P,H_2,F 与 O_2,P,H_1,E 分别四点共线,又由三角形的外心及垂心性质知

$$\angle BPO_2=\angle CPF,\angle APO_1=\angle DPH_1$$

所以 $$\angle NPO_2=\angle MPO_1,\angle H_1PR=\angle H_2PQ$$

所以 $\mathrm{Rt}\triangle PO_1M\backsim\mathrm{Rt}\triangle PO_2N$,$\mathrm{Rt}\triangle PH_1R\backsim\mathrm{Rt}\triangle PH_2Q$

所以 $$\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{PM}{PN}=\frac{\frac{1}{2}PA}{\frac{1}{2}PB}=\frac{PA}{PB}$$

$$\frac{PH_1}{PH_2}=\frac{PR}{PQ}=\frac{PA}{PB}(因为\ \triangle PAR\backsim\triangle PBQ)$$

所以 $$\frac{PO_1}{PO_2}=\frac{PH_1}{PH_2}$$

即 $$PO_1\cdot PH_2=PH_1\cdot PO_2$$

所以 O_1,O_2,H_2,H_1 四点共圆.

同理可证:$\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的外心、垂心四点共圆.

定理 15 (1990 年全国高中数学联赛试题)四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,对角线 AC 与 BD 相交于点 P,设 $\triangle PAB,\triangle PBC,\triangle PCD,\triangle PAD$ 的外接圆圆心分别为 O_1,O_2,O_3,O_4.求证:OP,O_1O_3,O_2O_4 三条直线共点.

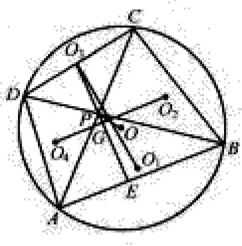


图 4.15

证明 如图 4.15,AP 为 $\triangle PAB$ 的外接圆 O_1 与 $\triangle PAD$ 的外接圆 O_4 的公共弦,所以 $O_1O_4\perp AP$,即 $O_1O_4\perp AC$,同理 $O_2O_3\perp AC$,所以 $O_1O_4\parallel O_2O_3$. 同理 $O_3O_4\parallel O_1O_2$.

所以 $O_1O_2O_3O_4$ 为平行四边形，O_1O_3 与 O_2O_4 相交于点 G.

设 O_3P 延长线交 AB 于 E，则由定理13知：$O_3E \perp AB$，又 AB 为圆 O 与圆 O_1 的公共弦，所以 $OO_1 \perp AB$，所以 $O_3E \parallel OO_1$，即 $O_3P \parallel OO_1$. 同理可证：$O_1P \parallel OO_3$.

所以 OO_1PO_3 为平行四边形. OP 与 O_1O_3 也相交于点 G，所以 O_1O_3，O_2O_4，OP 三直线相交于点 G，即共点于 G，且 G 为三线段中点.

定理 16 （第7届CMO试题）凸四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于点 P，$\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的外接圆相交于点 P 和另一点 Q，且 O，P，Q 三点两两不重合，则 $\angle OQP = 90°$.

证明 如图 4.16，设 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的外心分别为 O_1 和 O_2，则由定理13知 $O_1P \perp CD$，又 CD 为圆 O 与圆 O_2 的公共弦，所以

$$OO_2 \perp CD, OO_2 \parallel O_1P$$

同理

$$OO_1 \parallel O_2P$$

所以 O_1OO_2P 为平行四边形，O_1O_2 过 OP 中点 G，又 O_1O_2 垂直平分圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦 PQ，所以 $\triangle POQ$ 的中位线在 O_1O_2 上，所以

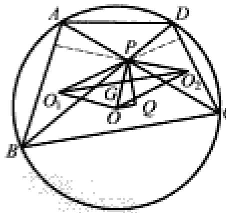


图 4.16

$$O_1O_2 \parallel OQ$$

又

$$O_1O_2 \perp PQ, PQ \perp OQ$$

所以

$$\angle OQP = 90°$$

定理 17 将圆内接四边形 $ABCD$ 的对边 BC 与 AD，BA 与 CD 分别延长交于 Q，P 两点，对角线 AC 与 BD 交于 M，O 为四边形 $ABCD$ 外接圆的圆心，求证：O 是 $\triangle PQM$ 的垂心.

证明 如图 4.17，作 A，D，M 的外接圆交 QM 延长线于 F，则有 A，D，M，F 四点共圆，又因为

$$\angle QBD = \angle QAM = \angle DFM$$

于是 B，F，D，Q 四点共圆，由圆幂定理，得

$$QM \cdot QF = QD \cdot QA = QO^2 - R^2$$

$$QM \cdot MF = MB \cdot MD = R^2 - MO^2$$

两式相减，得

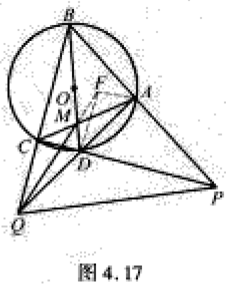


图 4.17

$$QM^2 = QO^2 + MO^2 - 2R^2$$

同理可得

$$PM^2 = PQ^2 + MO^2 - 2R^2$$

两式相减，得 $$OM^2 - PM^2 = QO^2 - PQ^2$$

于是 $$OM \perp PQ$$

同理 $$OP \perp QM, OQ \perp PM$$

因此，O 是 $\triangle PQM$ 的垂心.

定理 18 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，AD，BC 延长线交于 F，AB，DC 延长线交于 E，O_1 为 $\triangle ADE$ 的外心，O_2 为 $\triangle ABF$ 的外心，则 $\triangle O_1OO_2 \backsim \triangle ECF$.

证明 如图 4.18，联结 O_1A，O_1E，OA，OC，AC，O_2A，O_2F，EF. 由

$$\angle AO_1E = 2(180^\circ - \angle ADE) = 2\angle ABC$$

$$\angle AOC = 2\angle ABC$$

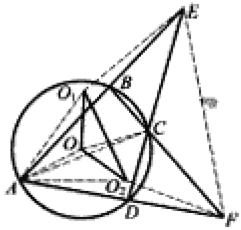


图 4.18

有 $$\angle AO_1E = \angle AOC$$

又 $$O_1A = O_1E, OA = OC$$

则 $$\triangle AO_1E \backsim \triangle AOC$$

同理 $$\triangle AOC \backsim \triangle AO_2F$$

由 $\triangle AO_1E \backsim \triangle AOC$，有 $\dfrac{AO_1}{AO} = \dfrac{AE}{AC}$.

且 $\angle O_1AE = \angle OAC$，有 $\angle O_1AO = \angle EAC$.

则 $\triangle AO_1O \backsim \triangle AEC$，有 $\dfrac{OO_1}{CE} = \dfrac{AO}{AC}$.

同理，由 $\triangle AOC \backsim \triangle AO_2F$，有 $\dfrac{OO_2}{CF} = \dfrac{AO}{AC}$，由 $\triangle AO_1E \backsim \triangle AO_2F$，有

$$\frac{O_1O_2}{EF} = \frac{O_2A}{AF} = \frac{AO}{AC}$$

则 $$\frac{OO_1}{CE} = \frac{OO_2}{CF} = \frac{O_1O_2}{EF}$$

即 $$\triangle O_1OO_2 \backsim \triangle ECF$$

顺便指出，还可以证明：$\triangle ADE$，$\triangle ABF$，$\triangle AEF$ 的垂心构成的三角形也与 $\triangle ECF$ 相似.

定理 19 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 P，且互相垂直，则

(1) 对角线分其四边形所成四个直角三角形的外心构成一个矩形.

(2) 对角线分其四边形所成四个直角三角形的外接圆与内切圆的半径之和等于两对角线之和.

(3) 顶点 A，C（或 B，D）关于对角线 BD（或 AC）的对称点，分别是对角线

BD(或 AC)分其四边形所成△BCD,△BAD(或△ADC,△ABC)的垂心.

(4) P 与△ABO,△BCO,△CDO,△DAO 的垂心 H_1,H_2,H_3,H_4 五点共线.

证明 (1) 如图 4.19,四边形 ABCD 内接于圆 O,且 $AC\perp BD$ 于 P,且四个直角三角形外心分别对应斜边的中点,易知四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 为一个矩形.

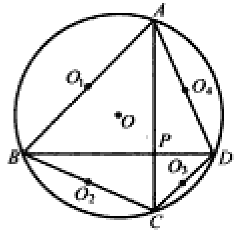


图 4.19

(2) 如图 4.19,利用三角形内切圆性质可知

$R_1+R_2+R_3+R_4+r_1+r_2+r_3+r_4=$

$\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)+\frac{1}{2}(PA+PA-AB)+$

$\frac{1}{2}(PB+PC-BC)+\frac{1}{2}(PC+PD-CD)+$

$\frac{1}{2}(PD+PA-AD)=$

$(PA+PC)+(PB+PD)=AC+BD$

(3) 如图 4.20(a),四边形 ABCD 内接于圆 O,且 $AC\perp BD$ 于 P,设 H 是顶点 C 关于 BD 的对称点,由垂心性质易知:H 为△ABD 的垂心.

如图 4.20(b),同理可证顶点 A 关于 BD 的对称点 A′ 是△BCD 的垂心.

仿上同理可证:顶点 B,D 关于对角线 AC 的对称点分别是对角线 AC 分四边形 ABCD 所成△ADC,△ABC 的垂心.

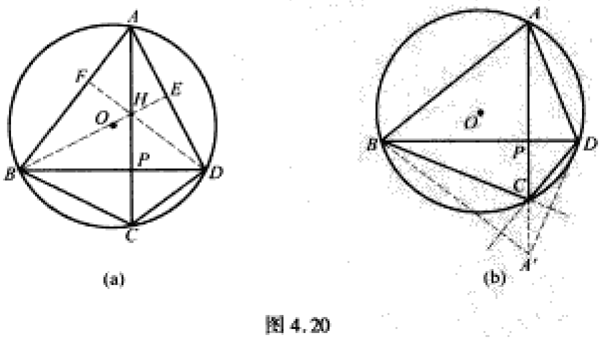


图 4.20

(4) 如图 4.21,联结 PH_3,PH_4,显然 $CH_3\parallel AH_4$,因为

$$\angle CAD=\angle DOF=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$$

所以∠CAD 与 $\angle CH_3F$ 互余.同理 $\angle AH_4E$ 与∠ACD 互余,则

$$CH_3 : AH_4 = \frac{CF}{\sin\angle CH_3F} : \frac{AE}{\sin\angle AH_4E} =$$
$$\frac{2CF}{\cos\angle CAD} : \frac{2AE}{\sin\angle ACD} =$$
$$\frac{CD\cos\angle ACD}{AD\cos\angle CAD} = \frac{CP}{AP}$$

所以 $$\triangle CH_3P \backsim \triangle APH_4$$

由对顶角定义知：H_3,P,H_4 共线．同理，H_3,P,H_1；H_2,P,H_1；H_2,P,H_3 共线，故 P,H_1,H_2,H_3,H_4 五点共线．

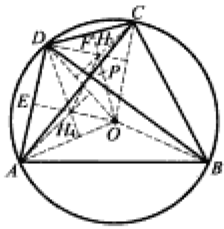


图 4.21

下面讨论一种特殊的圆内接四边形中有关三角形的五心的性质，亦为既有内切圆，又有外接圆的四边形，我们简称为双圆四边形或双心四边形．为了讨论上的方便，我们先约定：

双圆四边形 $ABCD$ 的外接圆、内切圆圆心分别为 O,I，其半径分别为 R,r，$AB=a,BC=b,CO=c,DA=d,AC=e,BD=f,A_1,B_1,C_1,D_1$ 分别为 AB，BC,CD,DA 边上的内切圆切点，又 AC 与 BD 交于点 P，四边形 $ABCD$ 的面积与半周长分别为 s,p，于是有：

定理 20 （1）$A_1C_1 \perp B_1D_1$．

（2）$s=\sqrt{abcd}$．

（3）$r=\dfrac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}=\dfrac{\sqrt{abcd}}{p}$，

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}.$$

（4）$R \geqslant \sqrt{2}r$．

证明 如图 4.22，显然对双圆四边形，有 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$，且 $a+c=b+d=p$．

（1）因为

$$\angle AD_1A_1=90°-\frac{1}{2}\angle A,\angle CC_1B_1=90°-\frac{1}{2}\angle C$$

在 $\triangle A_1B_1P$ 中

$$\angle PB_1A_1+\angle PA_1B_1=\angle AD_1A_1+\angle CC_1B_1=$$
$$180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=90°$$

所以 $$A_1C_1 \perp B_1D_1$$

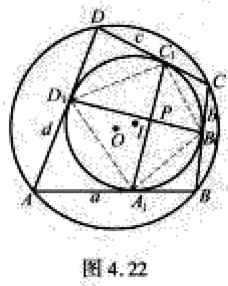


图 4.22

（2）由

$$4s^2=(ad\sin\angle BAD+bc\sin\angle BCD)^2=$$
$$a^2d^2+b^2c^2-\frac{1}{4}[(a^2+d^2-BD^2)-(b^2+c^2-BD^2)]^2=$$
$$4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

又
$$a+c=b+d=p$$
所以
$$s=\sqrt{abcd}$$

（3）由

$$s=\sqrt{abcd}=\frac{1}{2}(a+b+c+d)r\Rightarrow r=\frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}=\frac{\sqrt{abcd}}{p}$$

如图4.23，先在$\overset{\frown}{ADC}$上取点E，使$AE=CD=c$，则$EC=AD=d$，对于圆内接四边形$ABCD$及$ABCE$，利用托勒密定理，得

$$ac+bd=ef,ad+bc=ge\ (BE=g)$$

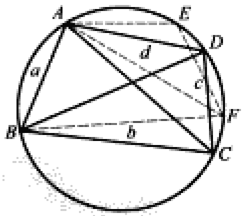


图4.23

同理，在$\overset{\frown}{BCE}$上取点F，使$BF=BD=f$(因为$\overset{\frown}{FEA}=\overset{\frown}{BCD}$)，得

$$ab+cd=fg$$

由此三式分别消去g，可求得

$$e=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}},f=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

由
$$s=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B=\frac{1}{2}(ab+cd)\frac{e}{2R}$$
得
$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}$$

（4）
$$R\geqslant\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\sqrt{abcd}\,2\sqrt{abcd}\,2\sqrt{abcd}}{abcd}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[4]{abcd}=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{abcd}}{\sqrt[4]{abcd}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{abcd}}{\frac{a+b+c+d}{4}}=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}=\sqrt{2}r$$

所以$R\geqslant\sqrt{2}r$，等号当且仅当四边形$ABCD$为圆内接正方形时成立.

例4.1 圆内接四边形$ABCD$的一组对边AD和BC的延长线相交于点P，另一组对边AB，DC的延长线相交于点Q，$\angle P$和$\angle Q$的平分线相交于点R.对角线AC与BD相交于点K，$\angle DKC$的平分线交CP于M.求证：(1)$PR\perp QR$；

(2) $QR \perp KM$.

证明 如图4.24,设直线 PR 交 DC,DB,BA 分别于点 E,G,F.

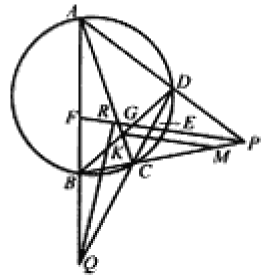


图 4.24

(1) 因为

$$\angle EFQ = \angle BAD + \angle APF$$

$$\angle FEQ = \angle DCP + \angle EPC$$

又 $\angle BAD = \angle DCP$,$\angle APF = \angle EPC$

所以 $\angle EFQ = \angle FEQ$

且 QR 为顶角 $\angle FQE$ 的角平分线,故 $PR \perp QR$.

(2) 因为

$$\angle DKM = \frac{1}{2}\angle DKC = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle DAC)$$

$$\angle DGP = \angle ADB - \angle APG = \angle ADB - \frac{1}{2}\angle APB =$$

$$\angle ADB - \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle DAC) =$$

$$\frac{1}{2}(\angle ADB + \angle DAC)$$

所以 $\angle DKM = \angle DGP$,从而 $KM \parallel RP$,故 $QR \perp KM$.

例 4.2 (2003年白俄罗斯数学奥林匹克试题)已知圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB = 2AD$,$BC = 2CD$.若 $\angle BAD = \alpha$,$AC = d$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 如图4.25,延长 AD 至点 M,使得 $DM = AD$.

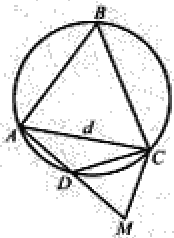


图 4.25

由于四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形,所以,$\angle CDM = \angle B$.因为

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2AD}{2DC} = \frac{AD}{DC} = \frac{DM}{DC}$$

所以 $\triangle ABC \backsim \triangle MDC$

于是 $2CM = AC = d$

且 $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle MDC} = 2S_{\triangle ACM}$

又因为 $\angle DCM = \angle BCA$,所以

$$\angle ACM = \angle DCB = 180^\circ - \alpha$$

于是 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ACM} = AC \cdot CM\sin\angle ACM = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$

例 4.3 （2003 年中国国家队培训试题）设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个既有外接圆，又有内切圆的凸四边形，且其内切圆分别与 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 和 A_4A_1 切于点 B_1, B_2, B_3, B_4. 求证：

$$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2+\left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2+\left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2+\left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2 \geqslant 8$$

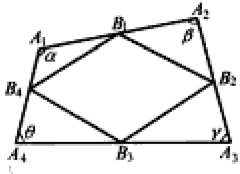


图 4.26

证明 如图 4.26，设内切圆半径为 r，而 $\angle A_2A_1A_4=\alpha, \angle A_1A_2A_3=\beta, \angle A_2A_3A_4=\gamma$, $\angle A_3A_4A_1=\theta$，则

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=360°$$

易得
$$A_1A_2=r\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)$$

$$B_1B_2=2r\cos\frac{\beta}{2}$$

所以
$$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\geqslant\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

同理
$$\left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2\geqslant\frac{\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$\left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2\geqslant\frac{\cot\frac{\gamma}{2}\cot\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}},\left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2\geqslant\frac{\cot\frac{\theta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

四式相乘，得

$$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2\left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2\left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2\left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2\geqslant$$

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\geqslant\frac{1}{\sin^8 45°}=$$

16（这里用到琴森不等式）

从而，利用均值不等式，可知原式左边大于等于 $4\sqrt[4]{\prod\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2}\geqslant 4\cdot 2=$ 8，命题得证.

例 4.4 （1998 年江苏省初中数学竞赛试题）如图 4.27，已知 A, B, C, D 顺

次在圆 O 上，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$，$BM\perp AC$，垂足为 M，求证：$AM=DC+CM$.

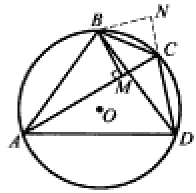


图 4.27

证法 1 如图 4.27，作 $BN\perp DC$ 交 DC 延长线于 N. 因为 $\angle BAC=\angle BDC$，$AB=BD$，所以

$$\mathrm{Rt}\triangle ABM\cong\mathrm{Rt}\triangle DBN$$

故 $$AM=DN,BM=BN$$

又 $$BC=BC$$

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle BMC\cong\mathrm{Rt}\triangle BNC$$

所以 $CM=CN$，故 $AM=MC+CD$.

证法 2 如图 4.28，延长 AC 至 N，使 $MN=AM$. 而 $BM\perp AN$，则 $BN=BA=BD$，所以 $\angle BDN=\angle BND$，且 $\angle BAM=\angle BNM$. 又 $\angle BAC=\angle BDC$，故 $\angle CDN=\angle CND$，则 $CD=CN$，所以 $AM=MC+CD$.

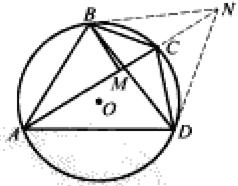


图 4.28

证法 3 如图 4.29，在 $\overset{\frown}{AB}$ 上取一点 C'，使 $\overset{\frown}{AC'}=\overset{\frown}{CD}$，则 $AC'=CD$. 过 B 作 $BN\perp AC'$ 交延长线于 N. 因为

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD},\overset{\frown}{AC'}=\overset{\frown}{CD}$$

所以 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC'}$，故 $\angle BAC=\angle BAC'$，所以

$$\mathrm{Rt}\triangle ABM\cong\mathrm{Rt}\triangle ABN$$

则 $$AM=AN,BM=BN$$

又 $$\angle BC'N=\angle BCM$$

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle BC'N\cong\mathrm{Rt}\triangle BCM$$

故 $$C'N=CM$$

故 $$AM=MC+CD$$

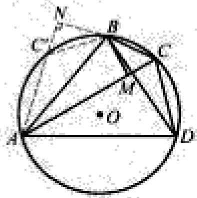


图 4.29

例 4.5 （1999 年全国初中数学联赛试题）如图4.29，已知四边形 $ABCD$ 内接于直径为 3 的圆 O，对角线 AC 是直径，对角线 AC 与 BD 的交点是 P，$AB=BD$，且 $PC=0.6$，求四边形 $ABCD$ 的周长.

解 如图 4.30，设圆心为 O，联结 BO 并延长交 AD 于 H. 因为 $AB=BD$，O 是圆心，所以 $BH\perp AD$. 又因为 $\angle ADC=90°$，所以 $BH\parallel CD$，从而

$$\triangle OPB \backsim \triangle CPD$$

所以
$$\frac{CD}{BO}=\frac{CP}{PO}$$

即
$$\frac{CD}{1.5}=\frac{0.6}{1.5-0.6}$$

故
$$CD=1$$

于是
$$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$$

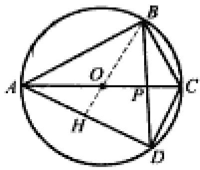


图 4.30

又
$$OH=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}$$

所以
$$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$$
$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$$

故四边形 $ABCD$ 的周长为 $1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

例4.6 (2000年全国初中数学联赛试题)如图4.31,已知四边形 $ABCD$ 的外接圆 O 的半径为2,对角线 AC 与 BD 的交点为 E, $AE=EC$, $AB=\sqrt{2}AE$,且 $BD=2\sqrt{3}$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

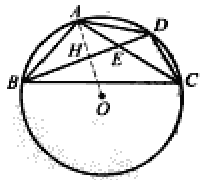


图 4.31

解 由题设得
$$AB^2=2AE^2=AE\cdot AC$$

于是 $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AB}$, 又 $\angle EAB=\angle BAC$, 故 $\triangle ABE \backsim \triangle ACB$,所以
$$\angle ABE=\angle ACB=\angle ADB$$

从而
$$AB=AD$$

联结 AO 交 BD 于 H,则
$$AH\perp BD, BH=HD=\sqrt{3}$$

故
$$OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{4-3}=1$$

于是
$$AH=OA-OH=2-1=1$$

所以
$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AH=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$$

因为 E 是 AC 的中点,所以
$$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCE}, S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDE}$$

相加得
$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}$$

故
$$S_{\text{四边形}ABCD}=2S_{\triangle ABD}=2\sqrt{3}$$

例 4.7 (2004 年第四届中国西部数学奥林匹克试题)$ABCD$ 为一凸四边形,I_1,I_2 分别为 $\triangle ABC$,$\triangle DBC$ 的内心,过 I_1,I_2 的直线分别交 AB,DC 于 E,F,分别延长 AB 和 DC 交于点 P,且 $PE = PF$.求证:A,B,C,D 四点共圆.

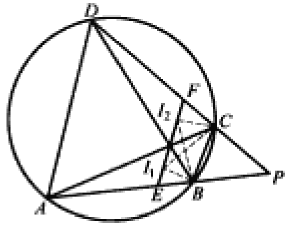


图 4.32

证明 如图 4.32,联结 I_1B,I_1C 与 I_2B,I_2C.因为 $PE = PF$,所以 $\angle PEF = \angle PFE$,又

$$\angle PEF = \angle I_2I_1B - \angle EBI_1 = \angle I_2I_1B - \angle I_1BC$$

$$\angle PFE = \angle I_1I_2C - \angle FCI_2 = \angle I_1I_2C - \angle I_2CB$$

所以 $$\angle I_2I_1B - \angle I_1BC = \angle I_1I_2C - \angle I_2CB$$

即 $$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB = \angle I_1I_2C + \angle I_1BC$$

又 $$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB + \angle I_1I_2C + \angle I_1BC = 2\pi$$

所以 $$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB = \pi$$

所以 I_1,I_2,C,B 四点共圆,所以

$$\angle BI_1C = \angle BI_2C$$

所以 $$\angle I_1BC + \angle I_1CB = \angle I_2CB + \angle I_2BC$$

$$\angle ABC + \angle ACB = \angle DBC + \angle DCB$$

所以 $\angle BAC = \angle BDC$,故 A,B,C,D 四点共圆.

练习 10

1.(2000 年全国初中数学联赛试题)已知 $ABCD$ 是一个半径为 R 的圆内接四边形,$AB = 12$,$CD = 6$,分别延长 AB 和 DC 相交于点 P,且 $BP = 8$,$\angle APD = 60°$,则 R 等于(　　)

A. 10　　B. $2\sqrt{21}$　　C. $12\sqrt{2}$　　D. 14

2.(2000 年江苏省初中数学竞赛试题)圆内接四边形 $ABCD$ 中,$\angle A = 60°$,$\angle B = 90°$,$AD = 3$,$CD = 2$.

(1) 求 BC 的长.

(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

(3) 比较 $AB + BC$ 与 $AD + CD$ 的大小.

3.(2000 年黄冈市初中数学竞赛试题)如图 4.33,已知等边 $\triangle ABC$ 内接于圆,在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上取异于 A,B 的点 M,设直线 AC 与 BM 相交于点 K,直线 AB 与

CM 相交于点 N. 证明:线段 AK 和 BN 的乘积与点 M 的选择无关.

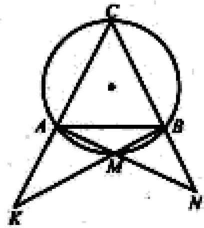


图 4.33

第 5 章　三角形五心性质的综合应用

本章我们将综合运用三角形五心的概念和性质等知识，解决中学数学竞赛中的有关三角形五心的平面几何试题，并通过一些典型试题和一题多解来阐述一些与平面几何有关的常见的竞赛试题的解题方法与规律.

例 5.1　(1994 年湖北省黄冈地区初中数学竞赛试题) 已知 P 为正三角形 ABC 外 $\angle BAC$ 内一点，且 $PA = PB + PC$. 求证：A,B,C,P 四点共圆.

证法 1　如图 5.1，以 B 为中心将 $\triangle BPC$ 按逆时针方向旋转 $60°$，得到 $\triangle ABP_1 \cong \triangle CBP$. 因为 $BP = BP_1$，$\angle PBP_1 = 60°$，所以 $\triangle BPP_1$ 是正三角形，所以 $PP_1 = PB$，从而 $AP_1 = PC$，所以

$$PP_1 + AP_1 = PB + PC = PA$$

所以 P_1 在 PA 上，A,P_1,P 三点共线. 而 $\angle APB = \angle ACB = 60°$，所以 A,B,C,P 四点共圆.

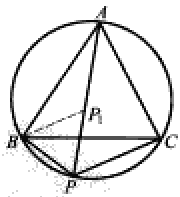


图 5.1

证法 2　如图 5.2，假设 A,B,C,P 不共圆，即 P 不在 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 上，那么 P 必在圆 O 外或圆 O 内. 当 P 在圆 O 外，将 $\triangle BPC$ 绕点 C 按顺时针方向转 $60°$ 得 $\triangle AP'C$，联结 PP'，则 $P'A = PB$，因为 $\triangle PP'C$ 是正三角形，所以 $PP' = PC$，因为 P 在圆 O 外，所以 $\angle PBC \neq \angle PAC$，则 AP' 与 AP 不重合. 在 $\triangle APP'$ 中，$PA < P'A + PP' = PB + PC$，这与条件 $PA = PB + PC$ 矛盾，故 P 不在圆外.

同理可证：P 不在圆 O 内.

所以 P 在圆 O 上，即 A,B,C,P 四点共圆.

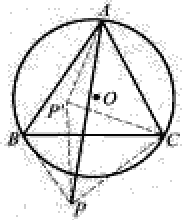


图 5.2

证法 3　如图 5.3，在 $\triangle ABP$ 中

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB\cos\angle APB$$

在 $\triangle APC$ 中　$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC\cos\angle APC$$

因为 $AB = AC$

所以 $PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB\cos\angle APB =$

$PA^2 + PC^2 - 2PA \cdot PC\cos\angle APC$

即 $PB^2 - PC^2 = 2PA(PB\cos\angle APB - PC\cos\angle APC)$

即 $(PB + PC)(PB - PC) = 2PA(PB\cos\angle APB - PC\cos\angle APC)$

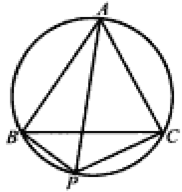


图 5.3

而 $PB + PC = PA$

$$(PB - PC) = 2(PB\cos\angle APB - PC\cos\angle APC) \quad ①$$

要使式 ① 成立,只有

$$\cos\angle APB = \cos\angle APC = \frac{1}{2}$$

而 $0° < \angle APB, \angle APC < 180°$, 所以

$$\angle APB = \angle APC = 60°$$

所以 A, B, C, P 四点共圆.

证法 4 如图 5.3,利用托勒密定理的逆定理来证明.

设正 $\triangle ABC$ 的边长 $AB = BC = CA = a$. 因为

$$PA = PB + PC$$

所以 $a \cdot PA = a \cdot PB + a \cdot PC$

即 $BC \cdot PA = AC \cdot PB + AB \cdot PC$

所以四边形 $ABPC$ 有外接圆,即 A, B, C, P 四点共圆.

说明 上述四法均为通法,四法相比较,显然证法 4 简洁明快. 证法 1 是旋转变换法,其方法是:把平面图形绕某一定点按一定方向旋转一个角度,得到与原图形的形状、大小都一样的图形. 证法 1 是以 B 为中心把 $\triangle BPC$ 按逆时针方向旋转 $60°$,得 $\triangle ABP_1 \cong \triangle CBP$. 同样还可以 A 为中心,以 C 为中心旋转等,请同学们研究,证法 2 是反证法;证法 3 是运用余弦定理获证.

例 5.2 (1995 年全国初中数学联赛试题) 如图 5.4,已知 $\angle ACE = \angle CDE = 90°$,点 B 在 CE 上,$CA = CB = CD$,过 A, C, D 三点的圆交 AB 于点 F.

求证:F 为 $\triangle CDE$ 的内心.

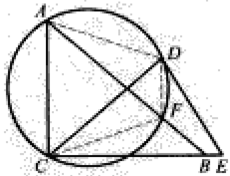


图 5.4

分析 1 联结 FD, FC. 欲证 F 为 $\triangle CDE$ 的内心只须证明 DF, CF 分别是 $\angle CDE, \angle DCE$ 的角平分线.

易证 $\angle CDF=\frac{1}{2}\angle CDE=45^{\circ}$,因此关键是证 $\angle DCF=\angle BCF$,这可通过 $\triangle DCF\cong\triangle BCF$ 证得.

证法 1 如图 5.4,联结 FD,FC,AD. 因为 A,C,F,D 四点共圆,所以

$$\angle CDF=\angle CAB$$

又
$$AC=BC,\angle ACB=90^{\circ}$$

所以
$$\angle CAB=\angle ABC=45^{\circ}$$

所以 $\angle CDF=45^{\circ}$,而 $\angle CDE=90^{\circ}$,所以

$$\angle CDF=\frac{1}{2}\angle CDE$$

即 DF 平分 $\angle CDE$,因为 $CA=CD$,所以

$$\angle CAD=\angle CDA$$

又
$$\angle CDA=\angle CFA$$

所以
$$\angle CAD=\angle CFA$$

因为 A,C,F,D 四点共圆,所以

$$\angle CFD=180^{\circ}-\angle CAD$$

而
$$\angle CFB=180^{\circ}-\angle CFA$$

所以
$$\angle CFD=\angle CFB$$

又
$$\angle CDF=\angle CBF=45^{\circ},CF=CF$$

所以
$$\triangle DCF\cong\triangle BCF$$

所以 $\angle DCF=\angle BCF$,即 CF 平分 $\angle DCE$.

故 F 为 $\triangle CDE$ 的内心.

分析 2 实际上,也可以通过 $DF=BF$ 证 $\triangle CDF\cong\triangle CBF$,从而得出 CF 是 $\angle DCE$ 的平分线.

证法 2 如图 5.5,联结 DF,CF,DB. 由证法 1,知

$$\angle CDF=\angle CBF=45^{\circ}$$

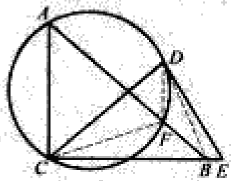


图 5.5

又
$$CD=CB$$

所以
$$\angle CDB=\angle CBD$$

所以
$$\angle CDB-\angle CDF=\angle CBD-\angle CBF$$

所以
$$\angle FDB=\angle FBD$$

所以
$$FD=FB$$

又
$$CD=CB,CF=CF$$

所以 $$\triangle CDF \cong \triangle CBF$$

所以 $\angle DCF = \angle BCF$，即 CF 平分 $\angle DCE$，由证法 1 知，DF 平分 $\angle CDE$，故 F 为 $\triangle CDE$ 的内心.

证法 3　如图 5.6，联结 AD, DF, CF，因为 A, C, F, D 四点共圆，所以 $\angle CFD = 180° - \angle CAD$，而 $AC = DC$，所以

$$\angle CAD = \angle CDA = \frac{180° - \angle ACD}{2}$$

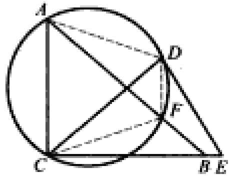


图 5.6

又 $$\angle ACD = 90° - \angle DCB$$

所以

$$\angle CAD = \frac{180° - (90° - \angle DCB)}{2} = \frac{90° + \angle DCB}{2}$$

所以

$$\angle CFD = 180° - \frac{90° + \angle DCB}{2} = 135° - \frac{\angle DCB}{2} \quad ①$$

又在 $\triangle CDF$ 中

$$\angle CFD = 180° - \angle CDF - \angle DCF = 180° - 45° - \angle DCF = 135° - \angle DCF \quad ②$$

比较 ①，② 有 $\angle DCF = \frac{1}{2}\angle DCB$，即 CF 平分 $\angle DCE$.

又由证法 1 知 DF 平分 $\angle CDE$，故 F 为 $\triangle CDE$ 的内心.

说明　本题把求证某点是三角形的内心转化为角平分线问题来证，这是解决问题的关键. 其中前两种证法是构造全等三角形证；证法 3 通过计算，比较，达到证角平分线之目的，三种证法各有千秋，均为通法.

例 5.3　(1989 年全国高中数学联赛试题) $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，$\angle A$ 的一个外角平分线交 $\triangle ABC$ 外接圆于点 P，过 P 作 $PQ \perp AB$ 于 Q，求证：$2AQ = AB - AC$.

证法 1　补短法证. 如图 5.7 所示，过 P 作 $PR \perp CA$ 交 CA 的延长线于 R，联结 PB, PC，因为

$$AP = AP, \angle PAR = \angle PAQ，因为$$

$$Rt\triangle PAR \cong Rt\triangle PAQ$$

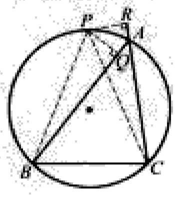


图 5.7

所以 $$AQ = AR, PQ = PR$$

又 $$\angle PBA = \angle PCA$$

所以 $$\mathrm{Rt}\triangle BPQ \cong \mathrm{Rt}\triangle CPR$$

于是 $BQ = CR$,从而

$$AB - AQ = BQ = CR = AC + AR$$

故 $$AB - AC = AQ + AR = 2AQ$$

证法 2 用截长法证. 如图 5.8 所示, 在 BQ 上截取 $QR = AQ$,联结 PR, PB, PC,因为 $PQ \perp BA$, $QR = QA$,所以 PQ 垂直平分 RA,所以

$$PA = PR, \angle PRA = \angle 1$$

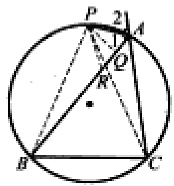


图 5.8

因为 $$\angle 1 = \angle 2$$

所以 $$\angle 2 = \angle PRA$$

又 $$\angle 2 + \angle PAC = \angle PRA + \angle PRB = 180^\circ$$

所以 $$\angle PAC = \angle PRB$$

又 $$\angle PCA = \angle PBR, PA = PR$$

所以 $$\triangle PCA \cong \triangle PBR$$

从而 $$AC = RB = BQ - RQ = AB - AQ - RQ$$

所以 $$AB - AC = AQ + RQ = 2AQ$$

证法 3 作和线段证. 如图 5.9 所示,在 CA 的延长线上截取 $AN = 2AQ$,联结 PN, PB, PC,过 P 作 $PM \perp AN$ 于 M,同证法 1 可证 $\triangle PQA \cong \triangle PMA$,所以

$$\angle PMA = \angle PQA = 90^\circ, \angle PAQ = \angle PAM, AM = AQ$$

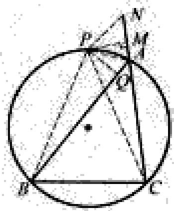


图 5.9

又 $$AN = 2AQ$$

所以 $$MN = AN - AM = 2AQ - AQ = AQ = AM$$

所以 PM 垂直平分 AN, 于是 $PN = PA$, $\angle PNM = \angle PAM$,所以 $\angle PNM = \angle PAQ$.

在 $\triangle PCN$ 和 $\triangle PBA$ 中,有

$$\angle PNC = \angle PAB, \angle PCN = \angle PBA, PN = PA$$

所以 $\triangle PCN \cong \triangle PBA$,从而 $CN = AB$,又

$$CN = AC + AN = AC + 2AQ$$

即 $$AB = AC + 2AQ$$

故 $$AB - AC = 2AQ$$

证法 4　作和线段证. 如图 5.10 所示, 过 P 作 $PM \parallel AB$, 交圆于 M, 联结 BM, 作 $MN \perp AB$ 于 N, 联结 MC, 因为 $PM \parallel AB$, 所以 $\overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{BM}$, 所以 $AP = BM$, 又 $PM \parallel AB$, 所以四边形 $PMBA$ 是等腰梯形, 于是 $\angle MBA = \angle PAB$, 又 $\angle PAB = \angle 1$, 所以 $\angle MBA = \angle 1$, 又 $\angle MBA = \angle MCA$, 所以 $\angle MCA = \angle 1$, 于是 $PA \parallel MC$, 所以 $\overset{\frown}{PM} = \overset{\frown}{AC}$, 从而 $PM = AC$.

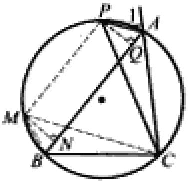


图 5.10

又四边形 $BMPA$ 是等腰梯形, 且 $PQ \perp AB$, $MN \perp AB$, 所以 $PQ = MN$, $\angle MBA = \angle PAQ$, 于是 $\mathrm{Rt}\triangle BMN \cong \mathrm{Rt}\triangle APQ$, 所以 $BN = AQ$. 于是 $AB = NQ + 2AQ$, 又四边形 $PMNQ$ 是矩形, 所以 $NQ = PM$, 从而 $NQ = AC$.

故 $AB = AC + 2AQ$, 即 $AB - AC = 2AQ$.

例 5.4　(2003 年德国中学数学竞赛试题) 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线的交点为 S, S 在 AB, CD 上的射影分别为点 E, F, 证明: EF 的中垂线平分线段 BC 和 DA.

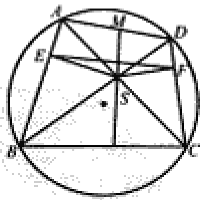


图 5.11

证明　如图 5.11, 设 AD 的中点为 M, 则 $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD})$, 由于

$$\overrightarrow{SE} \perp \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SE}$$

所以
$$\overrightarrow{SE} \cdot (\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SE}) = 0$$

即
$$\overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{SE} = 0$$

同理可得
$$\overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{SF} = 0$$

又
$$\angle EAS = \angle FDS, \angle AES = \angle DFS = 90^\circ$$

所以
$$\triangle ASE \backsim \triangle DSF$$

所以
$$|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SF}| = |\overrightarrow{SD}| \cdot |\overrightarrow{SE}|$$

又 $\angle ASF = \angle DSE$, 易得

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SF} = \overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{SE}$$

所以
$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SF})^2 - (\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SE})^2 = \\ &2\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SE} - 2\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{SF} = \\ &(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD}) \cdot \overrightarrow{SE} - (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD}) \cdot \overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{SF} = \\ &\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{SE} - \\ &(\overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{SF}) - (\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SF} - \overrightarrow{SD} \cdot \overrightarrow{SE}) = 0\end{aligned}$$

这表明 DA 的中点在 EF 的中垂线上，同理，BC 的中点也在 EF 的中垂线上，故 EF 的中垂线平分线段 BC 和 DA.

说明　证明线段(或所在直线)互相垂直，一般利用向量关系式：$AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ 较为方便.

例5.5　(2003年中国香港数学奥林匹克试题)已知 K, L, M, N 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 中边 AB，BC，CD，DA 的中点，证明：$\triangle ANK$，$\triangle BKL$，$\triangle CLM$，$\triangle DMN$ 的垂心恰好是一个平行四边形的四个顶点.

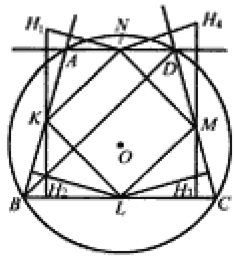


图 5.12

证法1　如图 5.12，设点 O 为四边形 $ABCD$ 的外心，点 H_1, H_2, H_3, H_4 分别为 $\triangle AKN$，$\triangle BKL$，$\triangle CLM$，$\triangle DMN$ 的垂心. 因为 $\triangle AKN \backsim \triangle ABD$，位似中心为 A，位似比为0.5，于是 $\triangle AKN$ 的外接圆圆心 O_1 恰好是 AO 的中点.

设 AN 的中点为 I，于是有 $O_1I \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}ON$，设 G_1 为 $\triangle AKN$ 的重心，利用欧拉线定理知：$G_1H_1 = 2O_1G_1$，于是，有

$$KH_1 = KG_1 + G_1H_1 = 2G_1I + 2O_1G_1 = 2O_1I$$

所以 $KH_1 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} ON$.

同理，$MH_4 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} ON$，所以 $KH_1 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} MH_4$，所以 $H_1H_4 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} KM$.

同理可证：$H_2H_3 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} KM$，所以 $H_1H_4 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} H_2H_3$.

故 $H_1H_2H_3H_4$ 是平行四边形.

证法2　如图 5.12，由于 N 是 AD 的中点，有 $ON \perp AD$. 由于 KH_1 是一条高线，所以，$KH_1 \perp AD$. 因此，$KH_1 \parallel ON$.

同理可证 $OK \parallel NH_1$.

这表明四边形 ONH_1K 是平行四边形.

类似地，四边形 ONH_4M 是平行四边形. 于是，四边形 KH_1H_4M 也是平行四边形. 考察 KM 的另一侧，易看出四边形 MKH_2H_3 也是平行四边形.

利用上述结论，便可断定四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 是平行四边形.

说明　本题的两种证法是证明四边形是平行四边形的常用方法.

例5.6　(第20届IMO试题的推广)如图 5.13，圆 K 内切于 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 D，且与 AB，AC 分别相切于 P，Q. 求证：PQ 的中点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

(本题已在三角形的内心概念和性质这一节中给出了一种证法，现在再给

出 4 种不同的证法.）

证法 1 如图 5.13，由 AP, AQ 切圆 K 于 P, Q. 故 A，I，K 共线，$AK \perp PQ$ 于 I，AI 平分 $\angle PAQ$，于是 I 是 $\triangle ABC$ 的内心 $\Leftrightarrow \angle PBI = \frac{1}{2}\angle ABC$，过 D 作圆 O，圆 K 的公切线 ED，则

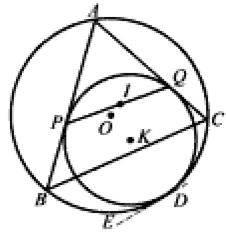


图 5.13

$$\angle EDP = \angle BPD, \angle EDB = \angle BAD$$

相减得

$$\angle BDP = \angle PDA$$

于是

$$\angle BDP = \frac{1}{2}(\angle BDP + \angle PDA) = \frac{1}{2}\angle BDA = \frac{1}{2}\angle ACB$$

另外 PI 是 $Rt\triangle KPA$ 斜边 AK 上的高，故

$$KI \times KA = KP^2 = KD^2$$

于是

$$\triangle IKD \backsim \triangle DKA, \angle KDI = \angle KAD$$

又

$$\angle KDB = 90° - \angle BDE = 90° - \angle PAD$$

于是

$$\angle BDI = \angle KDB + \angle KDI = 90° + \angle KAD - \angle PAD = 90° - (\angle PAD - \angle KAD) = 90° - \angle PAK = \angle APQ$$

于是 B, D, I, P 四点共圆. 这样

$$\angle PBI = \angle PDI = \angle BDI - \angle BDP = \angle APQ - \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) - \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ABC$$

于是 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

证法 2 如图 5.14，设圆 O，圆 K 相切于 D，则 O，K，D 共线，设 DK 交圆 O 于 F，则 DF 为圆 O 的直径.

设圆 O 的半径为 R，圆 K 的半径为 r，由 AP, AQ 切圆 K 于 P, Q，I 是 PQ 之中点，故 A, I, K 共线，设 AK 交圆 O 于 E，则 AE 平分 $\angle BAC$，$AE \perp PQ$，于是

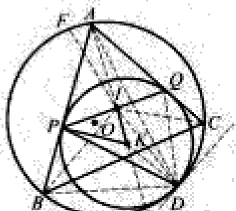


图 5.14

$$IE = IK + KE$$

$$IK = r\sin\angle KPI = r\sin\frac{\angle BAC}{2}, KA = \frac{r}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}$$

又

$$KE \cdot KA = KD \cdot KF$$

故 $$KE=\frac{KD\cdot KF}{KA}=\frac{r(2R-r)}{r}/\sin\frac{\angle ABC}{2}=(2R-r)\sin\frac{\angle ABC}{2}$$

且 $$IE=IK+KE=r\sin\frac{\angle BAC}{2}+(2R-r)\sin\frac{\angle ABC}{2}=2R\sin\frac{\angle BAC}{2}$$

又 $$BE=2R\sin\frac{\angle BAC}{2}$$

故 $$BE=IE,\angle IBE=\angle BIE$$

于是 $$\angle EBC+\angle IBC=\angle BIE=\angle ABI+\angle BAI$$

而 $$\angle EBC=\angle EAC=\angle BAI$$

故 $\angle IBC=\angle IBA$，即 IB 平分 $\angle ABC$，已证 IA 平分 $\angle BAC$. 故 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

证法3 如图5.15，可以证明：若 AK 交圆 O 于 E，I 在 AK 上，且 $EK=EB(=EC)$，则 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，略证.

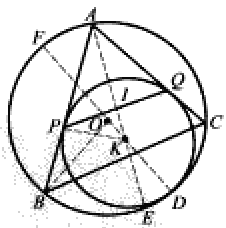


图5.15

设圆 O 的过 D 的直径为 DF，则 K 在 FD 上.

设圆 O 的半径为 R，$\odot K$ 的半径为 r，则

$$AK\cdot KE=FK\cdot KD=(2R-r)r=2Rr-r^2$$

联结 KP，则

$$KI\cdot KA=KP^2$$

故 $$AK\cdot KE=2Rr-KI\cdot KA$$

即 $$AK(KE+KI)=2Rr=2R\cdot AK\sin\frac{A}{2}$$

即 $$EI=2R\sin\frac{A}{2}=EB=EC$$

故 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

证法4 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 的半径为 R，内切圆圆 I' 的半径为 r，圆 K 的半径为 r_1，$I'O=d$. 易证：A,I,K,I' 四点共线，且 I 与 I' 在 K 的同旁. 即证：I,I' 为同一点，可证 $KI'=KI$. 由 I' 为 $\triangle AOK$ 的边 AK 上一点，如图5.16所示.

(1) 根据斯图瓦尔特定理，知

$$OK^2\cdot AI'+AO^2\cdot KI'=(OI')^2\cdot AK+AI'\cdot I'K\cdot AK$$

其中 $$OK=R-r_1,AI'=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}},AO=R,I'O=d$$

$$AK = \frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}, I'K = AK - AI' = \frac{r_1 - r}{\sin\frac{A}{2}}$$

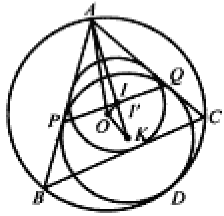


图 5.16

故

$$(R^2 + r_1^2 - 2Rr_1)\frac{r}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{R^2(r_1 - r)}{\sin\frac{A}{2}} =$$

$$\frac{d^2 r_1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{r_1 r(r_1 - r)}{\sin^3\frac{A}{2}}$$

(2) 又由欧拉定理,知

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

代入上式,得

$$(R^2 + r_1^2 - 2Rr)r + R^2(r_1 - r) = (R^2 - 2Rr)r_1 + \frac{r_1 r(r_1 - r)}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$r_1^2 r = \frac{r_1 r(r_1 - r)}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$r_1 = \frac{r_1 - r}{\sin^2\frac{A}{2}}, r_1 - r = r_1\sin^2\frac{A}{2}$$

故

$$I'K = \frac{r_1 - r}{\sin\frac{A}{2}} = r_1\sin\frac{A}{2}$$

而

$$IK = \frac{KQ^2}{KA} = \frac{r_1^{\ 2}}{\frac{r_1}{\sin\frac{A}{2}}} = r_1\sin\frac{A}{2}$$

即 $I'K = IK$. 故 I 与 I' 为同一点.

说明 本题涉及圆的多种知识,要认真理清思路和品味.

例 5.7 (第 29 届 IMO 试题) 在 Rt△ABC 中,AD 是斜边 BC 上的高,联结△ABD 和△ACD 的内心 I_1 与 I_2 的直线分别与边 AB,AC 相交于点 K,L. 若设△ABC,△AKL 的面积分别为 S 和 T,求证:$S \geqslant 2T$.

分析 利用的边长分别表示出 S 和 T,为表示出△AKL 的面积,先要表示出 AK 和 AL. 为此,可以采用多种方法,考虑到图形中诸多的垂直关系,可利用三角形垂心的性质证明,也可以建立直角坐标系,给出内心 I_1,I_2 的坐标,进而给出直线 I_1I_2 的方程,AK,AL 即为 I_1I_2 的横、纵截距,使问题获证.

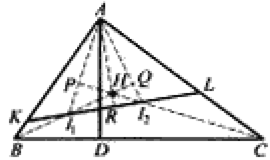


图 5.17

证法 1 如图 5.17, BI_1, CI_2 的延长线分别交 AI_2, AI_1 于点 Q, P, 且 BI_1 与 CI_2 交于点 H, AH 交 I_1I_2 于点 R.

因为 I_1, I_2 分别为 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 内心，所以 BH, CH 为 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的平分线，所以 H 为 $\triangle ABC$ 的内心，由 AI_1 平分 $\angle BAD$, $AD \perp BC$, $AB \perp AC$, 易知

$$\angle BAD = \angle ACB \Rightarrow \angle I_1AD = \angle PCB$$

所以 $CP \perp AI_1$, 同理 $BQ \perp AI_2$.

所以 H 又为 $\triangle AI_1I_2$ 的垂心.

所以 $\angle KAH = \angle LAH$, 又 $AH \perp KL$, 所以 $AK = AL$, 即 $\angle ALK = 45°$.

所以 $\triangle ALI_2 \cong \triangle ADI_2$, 设 $AD = h$, 则 $T = \frac{1}{2}h^2$, 又 $S = \frac{1}{2}ch$, 显然 $\triangle ABC$ 斜边中线长不小于高，即 $c \geqslant 2h$(c 为斜边).

所以 $S \geqslant 2T$.

说明 本证法运用了垂心的性质，降低了题目的难度.

证法 2 以 A 为原点, AB, AC 分别为 x 轴, y 轴建立直角坐标系，设 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, 则 $a^2 + b^2 = c^2$. 设圆 I_1 切 AC 于 H_1, 圆 I_2 切 AB 于 H_2.

为给出 I_1I_2 的方程，分析 I_1, I_2 的坐标满足的条件. 易知

$$x_{I_1} + y_{I_1} = I_1H_1 + AH_1 = AD$$

$$x_{I_2} + y_{I_2} = AH_2 + H_2I_2 = AD$$

而 $AD = \frac{bc}{a}$, 故 I_1I_2 的方程为

$$x + y = \frac{bc}{a}$$

于是 $AK = AL = \frac{bc}{a}$, 故

$$S = \frac{1}{2}bc, T = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2}$$

故
$$\frac{T}{S} = \frac{bc}{a^2} = \frac{bc}{b^2 + c^2} \leqslant \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

即 $S \geqslant 2T$.

说明 诸多的垂直关系常是采用解直角坐标系的有利条件，用这种解法须充分理解方程的意义，还要熟悉直角三角形的内切圆的性质: $r = p - c$(c 是

斜边长).

例 5.8 （第 37 届 IMO 试题）设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$，又设 D, E 分别是 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 的内心.证明：AP, BD, CE 交于一点.

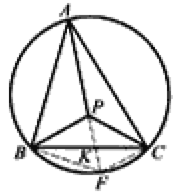


图 5.18

证法 1 如图 5.18，延长 AP 交 BC 于 K，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F，联结 BF, CF.

$$\angle APC - \angle ABC = \angle AKC + \angle PCK - \angle ABC = \angle PCK + \angle KCF = \angle PCF$$

同理 $$\angle APB - \angle ACB = \angle PBF$$

由假设有 $$\angle PCF = \angle PBF$$

由正弦定理，有

$$\frac{PB}{\sin\angle PFB} = \frac{PF}{\sin\angle PBF} = \frac{PF}{\sin\angle PCF} = \frac{PC}{\sin\angle PFC}$$

所以 $$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin\angle PFB}{\sin\angle PFC} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{AC}$$

即 $$\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$$

记 BD 与 AP 的交点为 M，由于 BD 是 $\angle ABP$ 的平分线，所以 $\frac{PM}{MA} = \frac{PB}{AB}$.

记 CE 与 AP 的交点为 N，由于 CE 是 $\angle ACP$ 的平分线，所以 $\frac{PN}{NA} = \frac{PC}{AC}$.

因而 $\frac{PM}{MA} = \frac{PN}{NA}$，即 M 与 N 重合.于是 AP, BD, CE 交于一点.

证法 2 如图 5.19，过点 P 作 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 的垂线，垂足分别为 X, Y, Z.由于 P, X, B, Z 共圆，且 PB 为圆的直径.于是，$PB = \frac{XZ}{\sin\angle ABC}$.同理，$PC = \frac{XY}{\sin\angle ACB}$.

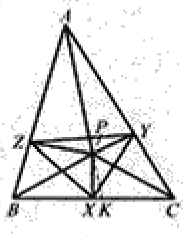


图 5.19

因此

$$\frac{PB}{PC} = \frac{XZ}{XY} \cdot \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \frac{XZ}{XY} \cdot \frac{AB}{AC}$$

延长 AP 交 BC 于 K，有

$$\angle APC - \angle ABC = \angle PCX + \angle BAP = \angle PYX + \angle ZYP = \angle ZYX$$

同理 $$\angle APB - \angle ACB = \angle YZX$$

由假设条件，$\angle ZYX = \angle YZX$，有 $XY = XZ$.

因而，$\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$. 同证法 1 即知 AP,BD,CE 交于一点.

说明 (1) 证法1和证法2都考虑运用正弦定理，但证法1的思维角度是从"延长 AP 交 $\triangle ABC$ 外接圆于 F" 切入的；而证法 2 的思维角度是从"过点 P 作 $\triangle ABC$ 三边的垂线" 切入的.

(2) 本题关键在于证明 $\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}$. 实际上，满足这一等式的点 P 的轨迹是一个圆，即阿波罗尼圆. 因此，也即要证明：满足本题条件(即关于角的等式)的点 P 在阿波罗尼圆的圆弧 $\overset{\frown}{AK}$ 上(其中 AK 是 $\angle BAC$ 的平分线). 作 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 K，又作 $\angle A$ 的外角平分线交 BC 于 K_1，阿波罗尼圆就是以 K_1K 为直径的圆. 可以证明：在弧 $\overset{\frown}{AK}$ 上的点 P 满足本题中的关于角的等式. 进而可以证明：使本题中角的等式成立的点 P_1 在弧 $\overset{\frown}{AK}$ 上. 这样也可以证明本题，但不如上述两种方法简明.

例 5.9 (第 42 届 IMO 中国国家队选拔试题) 给定正 $\triangle ABC$，D 是 BC 边上任意一点，$\triangle ABD$ 的外心、内心分别为 O_1,I_1，$\triangle ADC$ 的外心、内心分别为 O_2,I_2，直线 O_1I_1 与 O_2I_2 相交于 P. 试求：当点 D 在 BC 边上运动时，点 P 的轨迹.

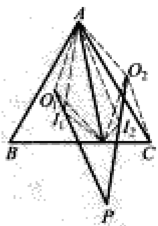


图 5.20

解 如图 5.20，联结 $AO_i,AI_i,i=1,2$，联结 DO_i,DI_i，$i=1,2$，联结 PD，则已证 $\angle AO_iD=\angle AI_jD=120°(i,j=1,2)$，所以 A,O_i,I_i,D 共圆($i=1,2$)，所以

$$\angle O_1PO_2=\angle O_1I_1D+\angle O_2I_2D-\angle I_1DP-\angle I_2DP=$$

$$360°-\angle O_1AD-\angle O_2AD-270°=30°$$

而
$$\angle O_1DO_2=60°=2\angle O_1PO_2$$

且
$$O_1D=\frac{1}{\sqrt{3}}AD=O_2D$$

所以 D 为 $\triangle PO_1O_2$ 外心，$PD=\frac{1}{\sqrt{3}}AD$，所以

$$\angle PDB=\angle PDO_1-\angle O_1DB=$$

$$180°-2\angle DO_1I_1-\angle O_1DB=180°-2\angle I_1AD-\angle BDO_1=90°$$

所以 $PD\perp BC$.

现以 BC 边中点 O 为原点，BC 边所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，不妨设正 $\triangle ABC$ 边长为 2，点 $P(x,y)$，$A(0,\sqrt{3})$，则由 $AD^2-OD^2=OA^2$，有

$$(\sqrt{3}y)^2-x^2=(\sqrt{3})^2$$

所以 P 的轨迹为双曲线 $y^2-\frac{x^2}{3}=1$ 的下支在 $x\in(-1,1)$ 中的一段.

说明　本题是平面几何与解析几何的综合试题，具有解法精巧的特点.

例 5.10　(2002 年全国高中数学联赛试题) 如图 5.21，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，$AB>AC$，点 O 是外心，两条高 BE，CF 交于点 H. 点 M，N 分别在线段 BH，HF 上，且满足 $BM=CN$，求 $\frac{MH+NH}{OH}$ 的值.

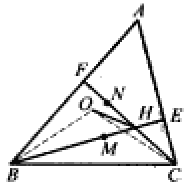


图 5.21

分析　只要抓住题目中的两个隐含条件：O，B，C，H 四点共圆及 $MH+NH=BH-CH$，入手容易，提供以下典型解法供参考.

解法 1　联结 OB，OC. 因为 $\angle BHC=\angle FHE=120°$，又 $\angle BOC=2\angle A=120°$，所以 O，B，C，H 四点共圆. 设

$$\angle OBC=\alpha=30°,\angle EBC=\beta$$

所以
$$\angle OBC=\angle OCB=30°,\angle EBC=\angle HOC=\beta$$

所以
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{BH-BM+CN-HC}{OH}=\frac{BH}{OH}-\frac{HC}{OH}$$

由正弦定理，在 $\triangle OHB$ 中

$$\frac{BH}{OH}=\frac{\sin(120°+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

在 $\triangle OHC$ 中
$$\frac{HC}{OH}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

所以
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{\sin(120°+\beta)-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{2\sin(30°-\beta)\sin 60°}{\sin(30°-\beta)}=\sqrt{3}$$

解法 2　如图 5.22，联结 OA，OB，OC，OM，ON，则 $OA=OB=OC$. $\angle 1=\angle 2$，$\angle 4=\angle 5+\angle 6$，$\angle A=60°$，$\angle 2+\angle 3=30°$，$\angle 5=30°$，$\angle 4=60°-\angle 1$，$\angle 6=60°-\angle 1-\angle 5=30°-\angle 1$，所以 $\angle 3=\angle 6$. 因为 $BM=CN$，所以 $\triangle BOM\cong\triangle CON$，所以 $OM=ON$，$\angle OMB=\angle ONC$.

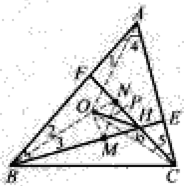


图 5.22

所以 $\angle OMH+\angle ONH=180°$，所以 O，M，H，N 四点共圆.

联结 MN,因为 $OM=ON$,所以 $\angle OHM=\angle OHN$.

设 OH 与 MN 交于点 P,所以 $\triangle MHP \backsim \triangle OHN$,所以

$$\frac{MH}{OH}=\frac{MP}{ON} \quad ①$$

因为 $\triangle HNP \backsim \triangle HOM$,所以

$$\frac{HN}{OH}=\frac{NP}{OM} \quad ②$$

① + ②,得

$$\frac{MH}{OH}+\frac{NH}{OH}=\frac{MN}{OM}$$

因为 $\angle MHN=60^\circ$,$\angle MON=120^\circ$. 又 $OM=ON$,所以

$$\frac{MN}{OM}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=\sqrt{3}$$

即

$$\frac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$$

解法3 设 $AB=c$,$AC=b$,$BM=CN=t$. 因为 $\angle A=60^\circ$,且 $CF\perp AB$,

 $BE\perp AC$,所以

$$\angle ABE=\angle ACF=30^\circ$$

所以

$$BF=BA-AF=c-\frac{b}{2},CE=b-\frac{c}{2}$$

所以

$$CH=\frac{CE}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{c}{2}\right),BH=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(c-\frac{b}{2}\right)$$

所以

$$MH+NH=BH-CH=\sqrt{3}(c-b) \quad ③$$

又

$$BC=\sqrt{c^2+b^2-2cb\cos 60^\circ}=\sqrt{c^2+b^2-cb}$$

因为 $\frac{BC}{\sin A}=2R$,所以

$$R=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{c^2+b^2-cb}$$

过 O 作 $OP\perp AC$ 于 P,过 H 作 $HQ\perp OP$ 于 Q,联结 OA,则 $OA=R=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{c^2+b^2-cb}$. 四边形 $QHEP$ 为矩形,且

$$AP=\frac{1}{2}AC=\frac{b}{2}$$

所以

$$PE=QH=\frac{1}{2}(c-b),OP=\frac{\sqrt{3}}{6}(2c-b)$$

$$HE = BE - BH = \frac{\sqrt{3}}{6}(2b - c)$$

所以
$$OQ = OP - HE = \frac{\sqrt{3}}{2}(c - b)$$

所以
$$OH = \sqrt{OQ^2 + HQ^2} = c - b \quad ④$$

所以
$$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{\sqrt{3}(c - b)}{c - b} = \sqrt{3}$$

解法4　如图5.23，以 BC 所在直线为 x 轴，过 O 作 BC 垂线交 BC 于 O'，以 OO' 为 y 轴，O' 为坐标原点建立如图所示的直角坐标系 $xO'y$.

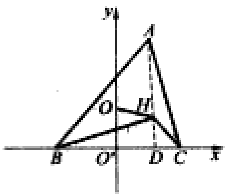


图 5.23

设 $O(0,a)$，$H(b,c)$，则 $C(\sqrt{3}a,0)$，$B(-\sqrt{3}a,0)$. 由欧拉定理知 $AH = 2OO'$，故点 A 坐标为 $A(b, c+2a)$，由 $OA^2 = OC^2$ 得
$$4a^2 = b^2 + (c + a)^2$$

所以
$$b^2 + c^2 = 3a^2 - 2ac \quad ①$$
$$OH^2 = b^2 + c^2 + a^2 - 2ac$$

将式①代入得
$$OH^2 = 4(a^2 - ac)$$

由面积关系知
$$\frac{1}{2}BC \cdot DH = \frac{1}{2}BH \cdot HC\sin 120^\circ$$

即
$$BH \cdot HC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}ac$$

所以
$$BH \cdot HC = 4ac$$

故
$$(BH - HC)^2 = BH^2 - 2BH \cdot HC + HC^2 =$$
$$[c^2 + (b + \sqrt{3}a)^2] - 8ac + [c^2 + (b - \sqrt{3}a)^2] =$$
$$2(b^2 + c^2) + 6a^2 - 8ac = 2(3a^2 - 2ac) + 6a^2 - 8ac =$$
$$12(a^2 - ac) = 3OH^2$$

所以
$$BH - HC = \sqrt{3}OH$$

故
$$\frac{MH + NH}{OH} = \frac{BH - CH}{OH} = \sqrt{3}$$

说明　本题提供了四种不同的典型解法，其中解法1用的是正弦定理，解法2用的是相似形法，解法3用的是余弦定理，解法4是解析法，各法均有其特

点,值得借鉴.

例 5.11 (2005年全国高中数学联赛试题)如图5.24,在$\triangle ABC$中,设$AB > AC$,过点A作$\triangle ABC$的外接圆的切线l,又以点A为圆心、AC为半径作圆分别交线段AB于点D,交直线l于点E,F.证明:直线DE,DF分别通过$\triangle ABC$的内心与一个旁心.

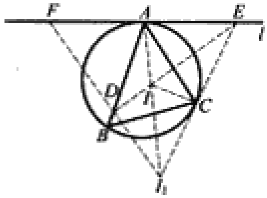


图 5.24

证法1 如图5.24,作$\angle BAC$的角平分线与DE,FD分别交于点I,I_1.由于$AC = AD = AE$,所以

$$\angle ACI = \angle ADI = \angle AED = \frac{1}{2}\angle FAD = \frac{1}{2}\angle ACB$$

故IC为$\angle ACB$的角平分线.于是,I为$\triangle ABC$的内心.

联结CI_1,因为AI是DC的中垂线,则

$$\angle ICI_1 = \angle IDI_1 = \angle FDE = 90^\circ$$

由于IC为$\angle ACB$的角平分线,所以I_1C为$\angle ACB$的外角平分线,即I_1为$\triangle ABC$中$\angle A$内的旁心.

证法2 (1)设$\triangle ABC$的内心为I,DI交EF所在直线于点E'.

在$\triangle ADE'$中应用张角公式有

$$\frac{\sin(A+B)}{AI} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{AE'} + \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}{AD} \qquad ①$$

下面证明

$$\frac{\sin(A+B)}{AI} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{AC} + \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}{AC} \qquad ②$$

$$式②成立 \Leftrightarrow \frac{\sin C}{AI} = \frac{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{C}{2}}{AI} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{AC}$$

在$\triangle AIC$中应用正弦定理,知上式成立,所以式②成立.

注意到由式①确定的AE'是唯一的,又因为$AD = AC$,则$AE' = AC = AE$,即点E与E'重合.故D,I,E三点共线,即DE通过$\triangle ABC$的内心.

(2)设$\triangle ABC$在$\angle A$内的旁心为I_1.假设DI_1交EF所在直线于点F',在$\triangle AI_1F'$中应用张角公式有

$$\frac{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}{AD}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{AF'}+\frac{\sin C}{AI_1} \qquad ③$$

下面证明

$$\frac{\sin\left(C+\frac{A}{2}\right)}{AC}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{AC}+\frac{\sin C}{AI_1} \qquad ④$$

$$\text{式 ④ 成立} \Leftrightarrow \frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{AC}=\frac{\sin C}{AI_1}\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{B}{2}}{AC}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{AI_1}$$

在 $\triangle ACI_1$ 中应用正弦定理，知上式成立，所以式 ④ 成立.

注意到由式 ③ 确定的 AF' 是唯一的.

又因为 $AD=AC$，则 $AF'=AC=AF$，即点 F 与 F' 重合.

故 D,F,I_1 三点共线，即 DF 通过 $\triangle ABC$ 的一个旁心 I_1.

证法 3 如图 5.25，以 A 为原点，EF,AO_1 分别为 x,y 轴建立直角坐标系（O_1 为 $\triangle ABC$ 外接圆圆心）. 令 $\angle BAO_1=\alpha,\angle CAO_1=\beta,AO_1=r$，$AE=R$，则

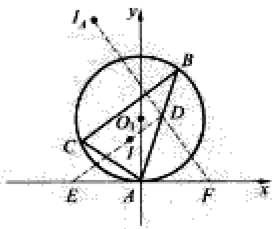


图 5.25

$$AB=c=2r\cos\alpha, AC=b=R=2r\cos\beta$$

$$BC=a=2r\sin(\alpha+\beta)$$

$$E(-2r\cos\beta,0),F(2r\cos\beta,0)$$

$$B(2r\cos\alpha\sin\alpha,2r\cos^2\alpha)$$

$$C(-2r\cos\beta\sin\beta,2r\cos^2\beta),D(R\sin\alpha,R\cos\alpha)$$

所以

$$D(2r\cos\beta\sin\alpha,2r\cos\beta\cos\alpha)$$

于是，直线 DE,DF 的方程分别为

$$y=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}(x+2r\cos\beta),y=-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}(x-2r\cos\beta)$$

$\triangle ABC$ 的内心、旁心分别为

$$I\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$$

$$I_a\left(\frac{-ax_A+bx_B+cx_C}{-a+b+c},\frac{-ay_A+by_B+cy_C}{-a+b+c}\right)$$

故
$$x_I=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}},\ y_I=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$
$$x_{I_a}=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},\ y_{I_a}=\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

(1) 证明 DE 过点 I.

DE 过点 $I \Leftrightarrow y_I=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}(x_I+2r\cos\beta)\Leftrightarrow$

$$\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\left(\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+2r\cos\beta\right)\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(1+\sin\alpha)=\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\alpha-\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

最后一式显然成立.所以,DE 过点 I.

(2) 证明 DF 过点 I_a.

DF 过点 $I_a \Leftrightarrow y_{I_a}=-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}(x_{I_a}-2r\cos\beta)\Leftrightarrow$

$$\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$-\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\cdot\left(\frac{2r\cos\alpha\cos\beta\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}-2r\cos\beta\right)\Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\alpha-1)=\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

最后一式显然成立.所以,DF 过点 I_a.

综合(1)、(2) 知,DE 过点 I,DF 过点 I_a.

例 5.12 (1998 年全国高中数学联赛试题) 如图 5.26,O,I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心与内心,AD 是 BC 边上的高,I 在线段 OD 上,求证:$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

注:$\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆是与边 AB,AC 的延长线以及 BC 都相切的圆.

证法 1 如图 5.26,设 I_a 为旁切圆圆心.则 A,I,I_a 共线,交圆 O 于 K,交 BC 于 P.显然,K 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点.于是,$OK\perp BC$,$OK=R$.因为

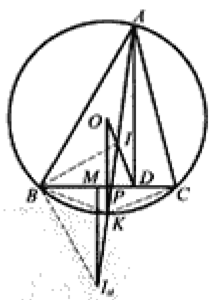


图 5.26

$$\angle IBI_a=90^\circ,\angle IBK=\frac{\angle A+\angle B}{2}=\angle BIK$$

所以
$$BK=IK$$

即 BK 为 $\triangle BII_a$ 斜边中线.

因为 $BK=KC$,所以

$$BK=IK=KI_a=KC$$

设旁切圆半径为 r_a,有 $I_aM=r_a$.因为

$$AD\perp BC,I_aM\perp BC$$

所以
$$\frac{r_a}{AD}=\frac{I_aP}{AP},\frac{R}{AD}=\frac{IK}{IA}$$

因此,要证
$$r_a=R\Leftrightarrow\frac{I_aP}{AP}=\frac{IK}{IA}$$

因为
$$I_aP=2IK-IP,AP=IA+IP\Leftrightarrow$$

$$\frac{2IK-IP}{IA+IP}=\frac{IK}{IA}\Leftrightarrow IK\cdot IA-IA\cdot IP=IP\cdot IK\Leftrightarrow$$

$$IK\cdot IA=IP(IA+IK)=IP\cdot AK\Leftrightarrow\frac{IA}{IP}=\frac{AK}{IK}\qquad①$$

因为 BI 为角平分线,所以$\frac{IA}{IP}=\frac{AB}{BP}$.

因为 $IK=KC$,所以$\frac{AK}{IK}=\frac{AK}{KC}$,故

$$式①\Leftrightarrow\frac{AB}{BP}=\frac{AK}{KC}\qquad②$$

因为 AI 为角平分线，所以

$$\angle BAP = \angle KAC$$

因为 $\angle ABP = \angle AKC$，所以

$$\triangle ABP \backsim \triangle AKC$$

故式②成立.

证法2 如图5.27，联结 IB，IC，作 $I_aB \perp IB$，$I_aC \perp IC$ 交于 I_a，则 I_a 即为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上旁切圆圆心. 显然，A，I，I_a 共线. 联结 AI，II_a，并设 II_a 交 BC 于 N，交 $\triangle ABC$ 外接圆于 M，联结 OM，BM，过 I_a 作 $I_aK \perp BC$ 于 K，则 OM 的长即为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，I_aK 的长即为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上旁切圆的半径. 所以，只须证明 $OM = I_aK$.

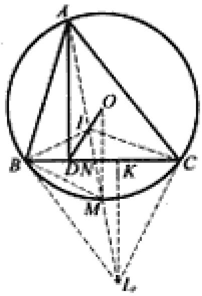


图 5.27

因为 I 为内心，所以 M 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点，又 AD 是 BC 边上的高，所以

$$AD \perp BC, OM \perp BC$$

于是

$$AD \parallel OM \parallel I_aK$$

$$\frac{KI_a}{AD} = \frac{NI_a}{AN}, \frac{OM}{AD} = \frac{IM}{AI}$$

故只须证明

$$\frac{NI_a}{AN} = \frac{IM}{AI} \qquad ③$$

因为 I 为 $\triangle ABC$ 内心，所以

$$\angle BAI = \angle CAI, \angle ABI = \angle CBI, \angle BCI = \angle ACI$$

因此

$$\angle BIM = \angle BAI + \angle ABI = \angle MAC + \angle CBI = \angle CBM + \angle CBI = \angle IBM$$

从而

$$BM = IM$$

又因为 $IB \perp I_aB$，所以 M 为 $\triangle BII_a$ 斜边 II_a 的中点，即 $IM = BM = MI_a$. 于是

$$NI_a = NM + MI_a = NM + IM$$

又

$$AN = AM - MN, AI = AM - IM$$

所以要证③成立，只须证明

$$\frac{NM+IM}{AM-MN}=\frac{IM}{AM-IM}$$

即
$$(NM+IM)(AM-IM)=IM(AM-MN)$$

$$NM\cdot AM-NM\cdot IM+AM\cdot IM-IM^2=IM\cdot AM-IM\cdot MN$$

$$IM^2=NM\cdot AM$$

即

$$BM^2=NM\cdot AM \quad ④$$

因为
$$\angle MBN=\angle MAC=\angle MAB,\angle BMN=\angle AMB$$

所以
$$\triangle MBN\backsim\triangle MAB$$

于是，$\frac{MB}{MN}=\frac{MA}{MB}$，即 $MB^2=NM\cdot AM$.

故式④成立，从而式③成立，所以 $OM=KI_a$，即 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与 BC 边上旁切圆的半径相等.

证法3 如图5.28，设 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的旁切圆圆心为 I_a. 有 A,I,I_a 三点共线，作 $I_aF\perp BC$ 于 F，设直线 AI_a 与圆 O 交于 K，与 BC 交于 E，联结 OK,CK,BI,CI，则

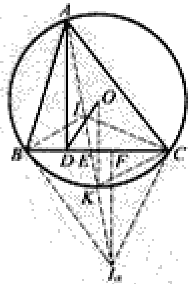


图5.28

$$\angle KIC=\angle IAC+\angle ICA=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle BCA)=$$
$$\angle BCK+\angle ICB=\angle ICK$$

所以
$$IK=CK$$

因为
$$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC,\angle IBI_a=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)$$

所以
$$\angle IBI_a=90^\circ$$

同理
$$\angle ICI_a=90^\circ$$

所以 I,B,I_a,C 四点共圆，所以

$$IE\cdot I_aE=BE\cdot CE$$

所以
$$EI_a=\frac{BE\cdot CE}{IE}$$

因为
$$AD\perp BC,OK\perp BC,I_aF\perp BC$$

所以
$$\frac{AD}{I_aF}=\frac{AE}{EI_a},\frac{AD}{OK}=\frac{AI}{IK}$$

所以
$$\frac{I_aF}{OK}=\frac{AI\cdot EI_a}{IK\cdot AE}=\frac{AI\cdot BE\cdot CE}{IK\cdot AE\cdot IE}$$

因为 IB 平分 $\angle ABC$，所以

$$\frac{AB}{BE}=\frac{AI}{IE}$$

所以
$$\frac{I_aF}{OK}=\frac{BE\cdot CE}{IK\cdot AE}\cdot\frac{AB}{BE}=\frac{CE\cdot AB}{IK\cdot AE}$$

又 $\triangle ABE\backsim\triangle CKE$，有$\frac{AB}{AE}=\frac{CK}{CE}$，故$\frac{AB}{AE}=\frac{IK}{CE}$，所以

$$AB\cdot CE=IK\cdot AE$$

所以
$$\frac{I_aF}{OK}=1$$

所以
$$I_aF=OK$$

又 OK 为圆 O 半径，I_aF 为旁切圆半径，则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆的半径. 证毕.

证法 4 如图 5.29，设 BC 边的旁切圆半径为 r_a，圆心为 I_a. K 为 AI 与外接圆交点，显然，A,I,K,I_a 共线，且 K 为点 B,I,C,I_a 外接圆圆心.

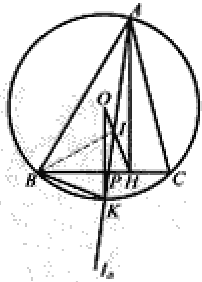


图 5.29

因为 $R=OK$，所以

$$\frac{R}{AH}=\frac{KI}{IA},\frac{r_a}{AH}=\frac{I_aP}{PA}$$

所以要证
$$R=r_a\Leftrightarrow\frac{KI}{IA}=\frac{I_aP}{PA}$$

因为 $I_aP=I_aK+KP=IK+KP$，$PA=PI+IA$

所以$\Leftrightarrow\frac{KI}{IA}=\frac{IK+KP}{PI+IA}\Leftrightarrow KI\cdot PI=IA\cdot KP\Leftrightarrow\frac{PI}{PK}=\frac{AI}{IK}$

因为
$$\frac{PI}{PK}=\frac{BI\sin\frac{B}{2}}{BK\sin\frac{A}{2}},\frac{AI}{IK}=\frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}}=\frac{AB\sin\frac{B}{2}}{BK\sin\frac{A+B}{2}}$$

故有
$$\frac{BI}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{AB}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

这在 $\triangle ABI$ 中应用正弦定理即可.

分析 设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆的半径为 r_a，则

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$$

所以
$$r_a=\frac{bc\sin A}{(b+c-a)}=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin B+\sin C-\sin A}=$$

$$2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

因此，要证 $r_a=R$，只须证

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\cos A=\cos B+\cos C$$

这个关系式揭示了该题的本质，因此，本题实质上是一道三角试题.

证法5 如图5.30，建立直角坐标系及设定点的坐标.联结 AI 并延长之交 BC 于点 E，联结 BI.设点 I 的坐标为 (x,y).因为

$$\frac{BE}{EC}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{c}{b}$$

由定比分点坐标公式有

$$x_E=\frac{-m+\frac{c}{b}n}{1+\frac{c}{b}}=\frac{-bm+cn}{b+c},y_E=0$$

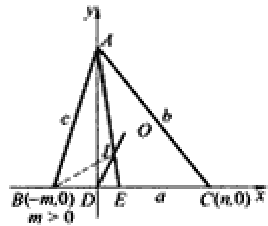


图5.30

又
$$\frac{|BE|}{|EC|}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{|BE|}{|BC|}=\frac{c}{b+c}\Rightarrow|BE|=\frac{ac}{b+c}$$

而
$$\frac{EI}{IA}=\frac{|BE|}{|AB|}=\frac{ac}{(b+c)c}=\frac{a}{b+c}$$

所以 $\triangle ABC$ 的内心 I 的坐标为

$$x=\frac{cn-bm}{a+b+c},y=\frac{ah}{a+b+c}$$

即
$$I\left(\frac{cn-bm}{a+b+c},\frac{ah}{a+b+c}\right)$$

又由 $|OA|=|OB|=|OC|$ 可得 $\triangle ABC$ 的外心 O 的坐标为 $\left(\frac{n-m}{2},\frac{h^2-mn}{2h}\right)$，则直线 ID 的斜率为

$$K_{DI}=\frac{ah}{ch-bm}=\frac{ab\sin C}{bc(\cos C-\cos B)}=\frac{\sin A}{\cos C-\cos B}$$

直线 OD 的斜率为

$$K_{OD}=\frac{h^2-mn}{h(n-m)}=\frac{(c\sin B)^2-(c\cos B)(b\cos C)}{c\cos B(b\cos C-c\cos B)}=$$

$$\frac{c\cos^2B-b\cos B\cos C}{c\cos B(b\cos C-c\cos B)}=\frac{\sin B\sin C-\cos B\cos C}{\sin(B-C)}=$$

$$-\frac{\cos(B+C)}{\sin(B-C)}=\frac{\cos A}{\sin(B-C)}$$

因为点 I 在线段 OD 上，所以 $K_{DI}=K_{DO}$，即

$$\frac{\sin A}{\cos C-\cos B}=\frac{\cos A}{\sin(B-C)}$$

所以

$$\sin A\cos\frac{B-C}{2}=\cos A\cos\frac{A}{2}$$

即

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\cos A$$

故

$$\cos A=\cos B+\cos C$$

证法 6 如图 5.31，联结 BO，BI，作 $IE\perp BC$ 于 E，$OF\perp BC$ 于 F，$IH\perp OF$ 于 H. 则 $\angle BOF=\angle A$，$\angle IBE=\frac{\angle B}{2}$. IE 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r. 由 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$ 得

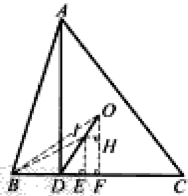


图 5.31

$$r_a=\frac{bc\sin A}{a+b+c}=2R\cdot\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=$$

$$4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=R(\cos A+\cos B+\cos C-1)$$

所以

$$BI=\frac{IE}{\sin\frac{B}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$BD=c\cos B=2R\sin C\cos B$$

$$BE=BI\cos\frac{B}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=R(\sin A-\sin B+\sin C)$$

$$BF=BO\cos\angle OBF=R\cos(90^\circ-A)=R\sin A$$

$$OF=R\sin(90^\circ-A)=R\cos A$$

因为点 I 在线段 OD 上，所以 $\mathrm{Rt}\triangle ODF\backsim\mathrm{Rt}\triangle OIH$，于是

$$\frac{DF}{OF}=\frac{IH}{OH}=\frac{EF}{OF-HF}=\frac{EF}{OF-IE}\Rightarrow\frac{BF-BD}{OF}=\frac{BF-BE}{OF-IE}$$

所以

$$\frac{R\cos A-2R\sin C\sin B}{R\cos A}=\frac{R\sin A-R(\sin A-\sin B+\sin C)}{R\cos A-R(\cos A+\cos B+\cos C-1)}\Rightarrow$$

$$\frac{\sin(B-C)}{\cos A}=\frac{\sin B-\sin C}{1-\cos B-\cos C}\Rightarrow$$

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin B-\sin C}=\frac{\cos A}{1-\cos B-\cos C}\Rightarrow$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos A=\cos\frac{B-C}{2}-\left(\cos B\cos\frac{B-C}{2}+\cos C\cos\frac{B-C}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos A=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3B-C}{2}+\cos\frac{B-3C}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\sin\frac{A}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)]=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

所以
$$2\sin\frac{A}{2}\sin B\sin C=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

故
$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$$

证法 7 设 DO 的延长线与边 AC 相交于 E，由三角形的内、外心的性质有

$$\frac{CB}{CD}\sin B+\frac{CA}{CE}\sin A=\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\frac{CB}{CD}\sin 2B+\frac{CA}{CE}\sin 2A=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$$

变形得
$$\frac{BD}{CD}\sin B+\frac{AE}{CE}\sin A=\sin C$$

$$\frac{BD}{CD}\sin 2B+\frac{AE}{CE}\sin 2A=\sin 2C$$

再变形得

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{AE}{CE}=\frac{\sin C}{\sin A} \quad ⑤$$

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin 2A}+\frac{AE}{CE}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A} \quad ⑥$$

⑤ - ⑥ 得

$$\frac{BD}{DC}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}\right)=\frac{\sin C}{\sin A}-\frac{\sin 2C}{\sin 2A} \quad ⑦$$

又 $AD\perp BC$，所以

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB\cos B}{AC\cos C}=\frac{\cos B\sin C}{\cos C\sin B} \quad ⑧$$

将 ⑧ 代入 ⑦ 得

$$\frac{\cos B\sin C}{\cos C\sin B}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin 2B}{\sin 2A}\right)=\frac{\sin C}{\sin A}-\frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

整理得
$$\cos A=\cos B+\cos C$$

故命题得证.

说明 本题是与三角形的五心联系非常紧密的试题，共提供7种不同的证

法.其中前4种证法主要是从几何的角度给出证明的;证法5主要是代数法(即解析法);证法6主要是三角法揭示该题的本质;证法7是运用三角形五心的性质证明的,是几何与三角的完美结合的体现.

例5.13 (2001年全国高中数学联赛试题)△ABC中,O为外心,三条高AD,BE,CF交于点H,直线ED和AB交于点M,FD和AC交于点N.求证:

(1)$OB\perp DF$,$OC\perp DE$.(2)$OH\perp MN$.

证法1 (1)建立直角坐标系,如图5.32所示,设$A(0,a)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$,则AB方程为

$$ax+by-ab=0 \quad ①$$

AC方程为

$$ax+cy-ac=0 \quad ②$$

CF方程为

$$bx-ay-bc=0$$

BE方程为

$$cx-ay-bc=0$$

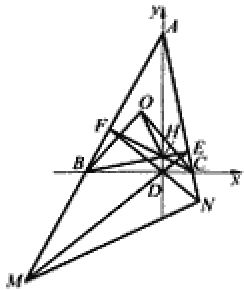


图5.32

因为BC中垂线方程为

$$x=\frac{b+c}{2}$$

AC中垂线方程为 $$y-\frac{a}{2}=\frac{c}{a}\left(x-\frac{c}{2}\right)$$

所以 $$H\left(0,-\frac{bc}{a}\right),O\left(\frac{b+c}{2},\frac{a^2+bc}{2a}\right)$$

又因为FD为过F的直线,其方程为

$$(ax+by-ab)+\lambda(bx-ay-bc)=0$$

FD过原点,所以 $$\lambda=-\frac{a}{c}$$

整理得FD方程为

$$(ac-ab)x+(bc+a^2)y=0 \quad ③$$

因为 $$\angle EDC=\angle FDB(\angle EDC=\angle EHC,\angle FDB=\angle FHB)$$

所以DE方程为

$$(ab-ac)x+(bc+a^2)y=0 \quad ④$$

所以 $$k_{FD}\cdot k_{OB}=\frac{ab-ac}{bc+a^2}\cdot\frac{bc+a^2}{ac-ab}=-1$$

故$OB\perp DF$.同理,$OC\perp DE$.

(2) MN 为既过 N 又过 M 的直线，故存在实数 λ_1,λ_2，使

$$\begin{cases}(ax+cy-ac)+\lambda_1[(ac-ab)x+(bc+a^2)y]=0\\(ax+by-ab)+\lambda_2[(ab-ac)x+(bc+a^2)y]=0\end{cases}$$

成立.

整理得

$$\begin{cases}a[1+\lambda_1(c-b)]x+[c+\lambda_1(bc+a^2)]y-ac=0\\a[1+\lambda_2(b-c)]x+[b+\lambda_2(bc+a^2)]y-ab=0\end{cases}$$

化简为
$$\begin{cases}ab[1+\lambda_1(c-b)]=ac[1+\lambda_2(b-c)]\\b[c+\lambda_1(bc+a^2)]=c[b+\lambda_2(bc+a^2)]\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}1=\lambda_1 b+c\lambda_2\\b\lambda_1=c\lambda_2\end{cases}$$

所以
$$\lambda_1=\frac{1}{2b}$$

MN 方程整理为

$$(ac+ab)x+(a^2+3bc)y-2abc=0$$

所以
$$k_{MN}\cdot k_{OH}=-\frac{ac+ab}{a^2+3ab}\cdot\frac{a^2+3bc}{ac+bc}=-1$$

故 $OH\perp MN$.

证法2 如图5.33，过 A 作 $AG /\!/ MN$，交 NF 延长线于点 G. 因为

$$\angle FDB=\angle BAE=\angle EDC=\angle BDM$$

所以 BD 为 $\angle MDF$ 的内角平分线. 因为

$$AD\perp BD$$

所以 DA 是 $\angle MDF$ 的外角平分线，所以

$$\frac{FA}{MA}=\frac{FD}{DM}=\frac{BF}{MB}\Rightarrow\frac{AF}{MA}=\frac{AF-BF}{AB}$$

所以 $MA=\dfrac{AB\cdot AF}{AF-BF}$，$MF=MA-AF=\dfrac{2AF\cdot BF}{AF-BF}$

所以 $\dfrac{MF}{MA}=\dfrac{2BF}{AB}=\dfrac{FN}{NG}$（因为 $AG /\!/ MN$）

因为
$$\angle DFC=\angle DAE$$

所以
$$\triangle FNC\backsim\triangle AND$$

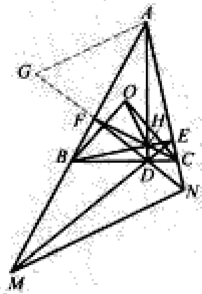


图5.33

有
$$\frac{AD}{FC}=\frac{AN}{FN}$$
于是
$$\frac{AN}{NG}=\frac{2BF\cdot AD}{AB\cdot FC}=2\sin B\cot B=2\cos B$$
而
$$\frac{BH}{\sin\angle BCF}=\frac{BC}{\sin\angle BHC}=\frac{BC}{\sin\angle BHF}=2BO$$
则
$$\frac{BH}{BO}=2\sin\angle BCF=2\cos B$$
从而
$$\frac{BH}{BO}=\frac{AN}{NG}$$
又
$$\angle OBH=\angle ABC-\angle ABO-\angle CBE=$$
$$\angle ABC-(\frac{\pi}{2}-\angle ACB)-(\frac{\pi}{2}-\angle ACB)=\angle ACB-\angle BAC$$
则
$$\angle ANG=\angle ACB-\angle NDC=\angle ACB-\angle BAC=\angle OBH$$
故
$$\triangle BOH\backsim\triangle NGA$$
因为 $OB\perp FN$，$BH\perp AN$，所以 $OH\perp AG$，则 $OH\perp MN$.

证法3 如图5.33，因为 $AD\perp BC$，$CF\perp AB$，所以 A,C,D,F 四点共圆.
于是
$$\angle BFD=\angle C,\angle FDB=\angle A$$
同理
$$\angle EDC=\angle A$$
又因为
$$\angle BDM+\angle BMD=\angle B$$
所以
$$\angle BMD=\angle B-\angle A$$
所以
$$\frac{DM}{BD}=\frac{\sin B}{\sin(B-A)}$$
同理
$$\frac{DN}{CD}=\frac{\sin C}{\sin(C-A)}$$
故
$$\frac{\sin\angle DMN}{\sin\angle DNM}=\frac{DN}{DM}=\frac{\dfrac{CD\sin C}{\sin(C-A)}}{\dfrac{BD\sin B}{\sin(B-A)}}=\frac{CD\sin C}{BD\sin B}\cdot\frac{\sin(B-A)}{\sin(C-A)}$$
又
$$\angle OBH=\angle OBC-\angle HBC=\frac{\pi-2\angle A}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\angle C\right)=\angle C-\angle A$$
所以
$$\sin\angle BOH=\frac{\sin(C-A)BH}{OH}$$
同理
$$\sin\angle COH=\frac{\sin(B-A)CH}{OH}$$
所以
$$\frac{\sin\angle COH}{\sin\angle BOH}=\frac{\sin(B-A)CH}{\sin(C-A)BH}$$

因为 F,B,D,H 四点共圆，且 BH 为直径，所以

$$BH\sin\angle BHD = BH\sin C = BD$$

同理
$$CH\sin B = CD$$

所以
$$\frac{\sin\angle DMN}{\sin\angle DNM} = \frac{\sin\angle COH}{\sin\angle BOH}$$

又
$$\angle DMN + \angle DNM = \angle BOC = \angle BOH + \angle COH$$

所以
$$\frac{\sin(\angle BOC - \angle DNM)}{\sin\angle DNM} = \frac{\sin(\angle BOC - \angle BOH)}{\sin\angle BOH}$$

所以 $\sin\angle BOC\cot\angle DNM - \cos\angle BOC = \sin\angle BOC\cot\angle BOH - \cos\angle BOC$

即
$$\cot\angle DNM = \cot\angle BOH$$

又因为 $\angle DNM$ 和 $\angle BOH$ 均为锐角，所以 $\angle DNM = \angle BOH$.

因为 $OB\perp ND$，所以 $OH\perp MN$.

证法 4　因为(1)易证，用向量法只证(2)．由三角形五心的向量表示法，得

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM} &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM}(\text{因为}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})\perp\overrightarrow{AM}) = \\ &\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM}) = \\ &\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EM}(\text{因为}\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{EM}) = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE} = \\ &|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cdot\cos(90^\circ - \angle B) = \\ &R\cdot|\overline{AB}|\cos A\sin B = 2R^2\cos A\sin B\sin C\end{aligned}$$

同理
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN} = 2R^2\cos A\sin B\sin C$$

所以
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$$

故 $OH\perp MN$.

证法 5　为证本题，先证如下命题．

命题　如图 5.34，若直线 $l\perp$ 线段 AB 于 H，则

$$M_1A^2 - MA^2 = M_1B^2 - MB^2 \quad ⑤$$

反之，若式⑤成立，则 M_1M 所在的直线 $l\perp AB$.

命题的证明　因为 $l\perp$ 线段 AB，所以由勾股定理得

$$AM_1{}^2 - AH^2 = HM_1{}^2,\ AM^2 - AH^2 = HM^2$$

两式相减得

$$AM_1{}^2 - AM^2 = HM_1{}^2 - HM^2 \quad ⑥$$

同理可得

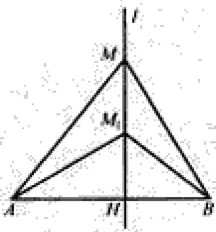


图 5.34

$$BM_1^2 - BM^2 = HM_1^2 - HM^2 \quad ⑦$$

由 ⑥,⑦ 得

$$AM_1^2 - AM^2 = BM_1^2 - BM^2$$

反过来,可设 $\angle AHM_1 = \theta$,则

$$\angle BHM_1 = \pi - \theta$$

所以 $M_1A^2 - MA^2 = AH^2 + HM_1^2 - 2AH \cdot HM_1\cos\theta - AH^2 - HM^2 + 2AH \cdot MH\cos\theta = HM_1^2 - HM^2 - 2AH \cdot M_1H\cos\theta + 2AH \cdot MH\cos\theta$

所以 $M_1B^2 - MB^2 = BH^2 + HM_1^2 - 2BH \cdot HM_1\cos(\pi - \theta) - BH^2 - HM^2 + 2BH \cdot HM\cos(\pi - \theta) = HM_1^2 - HM^2 + 2BH \cdot HM_1\cos\theta - 2BH \cdot HM\cos\theta$

因为 $M_1A^2 - MA^2 = M_1B^2 - MB^2$

所以 $-2AH \cdot M_1H\cos\theta + 2AH \cdot MH\cos\theta = 2BH \cdot HM_1\cos\theta - 2BH \cdot HM\cos\theta$

所以 $MH\cos\theta(AH + HB) = HM_1\cos\theta(AH + HB)$

所以 $M_1M\cos\theta = 0$

得 $\cos\theta = 0$

因为 $0 < \theta < \pi$,所以 $\theta = \frac{\pi}{2}$.

所以直线 $l \perp$ 线段 AB.

(1) 略.

(2) 如图 5.35,在 $\triangle ACM$ 中,由 $CF \perp AM$ 得

$$MC^2 - MH^2 = AC^2 - AH^2 \quad ⑧$$

在 $\triangle ABN$ 中,由 $BE \perp AN$,得

$$NB^2 - NH^2 = AB^2 - AH^2 \quad ⑨$$

在 $\triangle ABC$ 中,由 $DA \perp BC$,得

$$BD^2 - CD^2 = BA^2 - AC^2 \quad ⑩$$

在 $\triangle OBN$ 中,由 $OB \perp DF$,得

$$BN^2 - BD^2 = NO^2 - OD^2 \quad ⑪$$

在 $\triangle OMC$ 中,由 $OC \perp MN$,得

$$MC^2 - CD^2 = MO^2 - OD^2 \quad ⑫$$

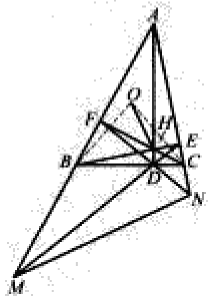


图 5.35

运用命题之逆,要证 $OH \perp MN$,只须证

$$MO^2 - MH^2 = NO^2 - NH^2$$

⑧ - ⑨ + ⑩ + ⑪ - ⑫,得

$$NH^2 - MH^2 = NO^2 - MO^2$$

所以
$$OM^2 - MH^2 = NO^2 - NH^2$$

所以
$$OH \perp MN$$

说明　利用本命题轻松地证得了结论,它在解竞赛中平几试题的垂直问题确实有重要作用.

练习 11

1.在锐角 $\triangle ABC$ 中,$\angle A = 60°$,H,I,O 分别为其垂心,内心,外心,且 $BH = OI$,求 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的度数.

2.设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,R 和 r 分别是其外接圆和内切圆半径,则 $AH + BH + CH = 2(R + r)$.

3.设 O 与 I 为 $\triangle ABC$ 的外心与内心,且 $BC = \frac{1}{2}(AC + AB)$,求证:$\angle A$ 的角平分线与 OI 垂直.

4.(第 22 届俄罗斯奥林匹克试题)等腰 $\triangle ABC$ 中,$AC = BC$,O 是它的外心,I 是它的内心,点 D 在 BC 边上,且 $OD \perp BI$.证明:$ID \parallel AC$.

5.设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 三边的长,R 为外接圆半径,O,H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和垂心.求证:$OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

6.(1999 年世界城市数学竞赛试题)已知 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,联结 AI,BI,CI.若 $\triangle BIC$,$\triangle CIA$,$\triangle AIB$ 中有一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似,求 $\triangle ABC$ 各角的大小.

7.(1996 年第 37 届 IMO 备选题)设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,P 为该三角形外接圆上的一点,E 是高 BH 的垂足,并设 $PAQB$ 与 $PARC$ 都是平行四边形,AQ 与 HR 交于 X.证明:$EX \parallel AP$.

8.设 G,I 分别是 $\triangle ABC$ 的重心和内心,且 $CI \perp GI$,又 $BC = a$,$CA = b$,$AB = c$.求证:$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$.

9.(1999 年保加利亚数学奥林匹克试题)已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 分别在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1 上,使得 $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$,$\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$,$\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$.证明:$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心与 $\triangle ABC$ 的外心一样远.

第 6 章　平面几何中的几个重要定理

为了使读者全面系统地掌握中学数学竞赛中的平面几何知识，再给出平面几何中的几个重要定理.

定理 1(斯特华尔特定理)　设 P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，且 $BP : PC = m : n$，则有

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)AP^2 + \frac{mn}{m+n}BC^2$$

证明　如图 6.1，设 $\angle APB = \theta$，由余弦定理，得

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP\cos\theta$$

即

$$AB^2 = AP^2 + \left(\frac{m}{m+n}BC\right)^2 - 2AP \cdot \frac{m}{m+n}BC\cos\theta \quad ①$$

$$AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2AP \cdot CP\cos(\pi - \theta)$$

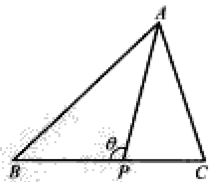


图 6.1

即

$$AC^2 = AP^2 + \left(\frac{n}{m+n}BC\right)^2 + 2AP \cdot \frac{n}{m+n}BC \cdot \cos\theta \quad ②$$

① × n + ② × m，得

$$nAB^2 + mAC^2 = (m+n)AP^2 + \frac{mn}{m+n}BC^2$$

说明　将上式变形得

$$AP^2 = \frac{n}{m+n}AB^2 + \frac{m}{m+n}AC^2 - \frac{mn}{(m+n)^2}BC^2$$

或者形如

$$CP \cdot AB^2 + BP \cdot AC^2 = BC \cdot AP^2 + BP \cdot CP \cdot BC$$

即

$$AP^2 = \frac{AC^2 \cdot BP + AB^2 \cdot CP}{BC} - BP \cdot CP$$

特别地，当 $m = n$ 时，即 P 为 BC 中点，得

$$AB^2 + AC^2 = 2(AP^2 + BP^2)$$

此即为三角形的中线定理，在三角形重心的性质中已出现过. 利用斯特华尔特

定理,取定参量$\frac{n}{m}$,可得三角形的内外角平分线长及高.

定理 2(梅涅劳斯定理及其逆定理)　设 P,Q,R 分别是$\triangle ABC$的三边BC,CA,AB 上或它们延长线上三点,则点 P,Q,R 共线的充要条件是:$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$.

证明　先证必要性:即梅涅劳斯定理. 如图 6.2(a) 所示,过点 C 作$CS\parallel PQ$ 交AB 于点S,则

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RS},\frac{CQ}{QA}=\frac{SR}{RA}$$

所以
$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BR}{RS}\cdot\frac{SR}{RA}=1$$
于是必要性得证.

下面再证充分性:即梅涅劳斯定理的逆定理. 如图 6.2(b) 所示,不妨设 P 在BC边的延长线上,点 Q 和R 在AC,AB 或它们的延长线上,设 QR 和BC 延长线的交点为 P',根据梅涅劳斯定理,得$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$.与已知的式子比较得$\frac{BP'}{P'C}=\frac{BP}{PC}$.因为 P 和P' 都在CB 的延长线上,所以 P 和P' 重合,所以 P,Q,R 三点共线.

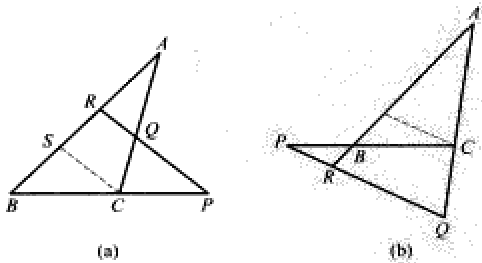


图 6.2

说明　梅涅劳斯定理及其逆定理应用非常广泛,尤其在三点共线问题的讨论中,常常给解题带来很多方便. 在应用时,通常把直线 PQ 叫做$\triangle ABC$的截线.

定理 3(塞瓦定理及其逆定理)　设 D,E,F 分别是$\triangle ABC$的边BC,AC,AB 或其延长线上的点,则 AD,BE,CF 三线共点或互相平行的充要条件是:$\frac{AF}{FB}\cdot$

$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$

证明　如图 6.3,先证必要性:即塞瓦定理.

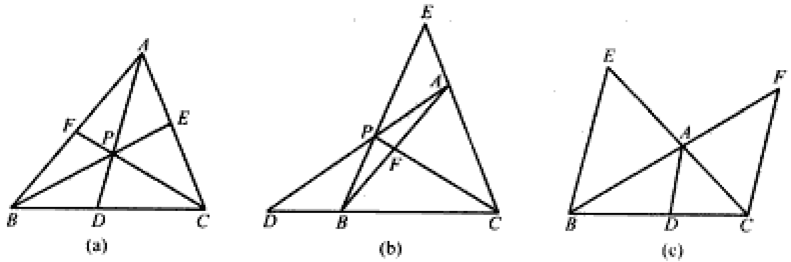


图 6.3

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle CPD}}=\frac{S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BPD}}{S_{\triangle ACD}-S_{\triangle CPD}}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$$

同理　$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle CBP}}{S_{\triangle ABP}},\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle BCP}}$

所以　$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}\cdot\frac{S_{\triangle CBP}}{S_{\triangle ABP}}\cdot\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle BCP}}=1$

即塞瓦定理成立.

下面再证充分性:塞瓦定理的逆定理.

不妨设 AD, BE 交点 P, CP 交 AB 于 F',依上面所证,有 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$,与已知的式子比较得 $\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB}$,这表明 F 和 F' 分 AB 所成的比相等.于是,F 和 F' 重合,即 AD, BE, CF 相交于一点 P.若 $BE\parallel CF$,则 $\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{EC}$,于是,把它代入已知的式子中,得

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AC}{EC}=1$$

所以　$\frac{BD}{DC}=\frac{EA}{AC}$

所以　$BE\parallel AD$

即 AD, BE, CF 三线互相平行.

定理 4(托勒密定理)　圆内接四边形的两组对边乘积之和等于两对角线的乘积.

证明　如图 6.4,四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,在 BD 上取点 P,使 $\angle PAB=$

$\angle CAD$，则 $\triangle ABP \backsim \triangle ACD$，于是

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CD}\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BP$$

又 $\triangle ABC \backsim \triangle APD$，有

$$BC\cdot AD=AC\cdot PD$$

上述两乘积式相加，得

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BP+PD)=AC\cdot BD$$

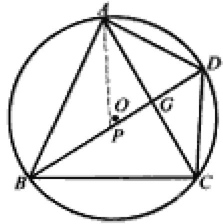


图 6.4

四边形中的托勒密定理：设 $ABCD$ 为任意凸四边形，则 $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$，当且仅当 A,B,C,D 四点共圆时取等号.

如图 6.5，取点 E 使 $\angle BAE=\angle CAD$，$\angle ABE=\angle ACD$，则 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$，即有 $\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}$，且 $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BE}$，即

$$AB\cdot CD=AC\cdot BE \qquad ①$$

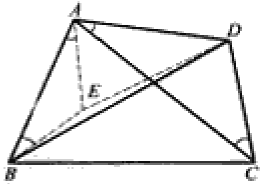


图 6.5

又 $\angle DAE=\angle CAB$，有 $\triangle ADE \backsim \triangle ACB$，亦有

$$AD\cdot BC=AC\cdot DE \qquad ②$$

由式①与式②，注意到 $BE+ED\geqslant BD$，有

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BE+ED)\geqslant AC\cdot BD$$

其中等号当且仅当 E 在 BD 上，即 $\angle ABD=\angle ACD$ 时成立. 此时，A,B,C,D 四点共圆.

由此，即有

托勒密定理的逆定理：在凸四边形 $ABCD$ 中，若 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$，则 A,B,C,D 四点共圆

例 6.1 （第 3 届 CMO 试题）如图 6.6，设 C_1，C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 半径的 2 倍. 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1，将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1，A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2，A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3，A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4. 试证四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长大于等于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长的 2 倍，并请确定等号成立的条件.

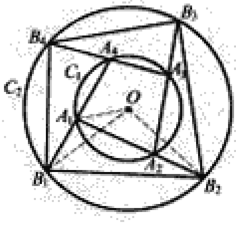


图 6.6

证明 设同心圆圆心为 O，联结 OA_1，OB_1，OB_2. 在四边形 $OA_1B_1B_2$ 中应用推广的托勒密定理，有

$$OB_1 \cdot A_1B_2 \leqslant OA_1 \cdot B_1B_2 + OB_2 \cdot A_1B_1$$

因
$$OB_1 = OB_2 = 2OA_1$$

则
$$2A_1B_2 \leqslant B_1B_2 + 2A_1B_1$$

从而

$$B_1B_2 \geqslant 2A_1A_2 + 2A_2B_2 - 2A_1B_1 \quad ①$$

同理
$$B_2B_3 \geqslant 2A_2A_3 + 2A_3B_3 - 2A_2B_2$$
$$B_3B_4 \geqslant 2A_3A_4 + 2A_4B_4 - 2A_3B_3$$
$$B_4B_1 \geqslant 2A_4A_1 + 2A_1B_1 - 2A_4B_4$$

以上四式相加，得

$$B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + B_4B_1 \geqslant 2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1) \quad ②$$

为使式 ② 中等号成立，当且仅当所加的四式均为等式．而式 ① 等号成立，当且仅当四边形 $OA_1B_1B_2$ 内接于圆．这时，$\angle OA_1A_2 = \angle OB_1B_2 = \angle OB_2B_1 = \angle A_4A_1O$，即 OA_1 为 $\angle A_4A_1A_2$ 的平分线．同理，OA_2，OA_3，OA_4 分别为 $\angle A_1A_2A_3$，$\angle A_2A_3A_4$，$\angle A_3A_4A_1$ 的平分线．这意味着 O 为四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的内切圆的圆心，故知四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形，即当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为正方形时式 ② 等号成立．

定理 5（西姆松定理）　如图 6.7，过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边的垂线，则三垂足点共线（此线常称为西姆松线）．

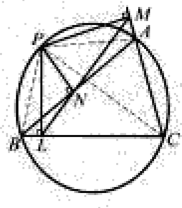


图 6.7

证明　如图 6.7，设 P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任一点，从 P 向三边 BC，CA，AB 所在直线作垂线，垂足分别为 L，M，N．联结 PA，PC，由 P，N，A，M 四点共圆，有

$$\angle PMN = \angle PAN = \angle PAB = \angle PCB = \angle PCL$$

又 P，M，C，L 四点共圆，有 $\angle PML = \angle PCL$，故 $\angle PMN = \angle PML$，即 L，N，M 三点共线．

西姆松定理的逆定理：若一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上．

如图 6.7，设点 P 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 所在直线上的射影分别为 L，M，N，且此三点共线．

由 $PN \perp AB$ 于 N，$PM \perp AC$ 于 M，$PL \perp BC$ 于 L，知 P，B，L，N 及 P，N，A，M 分别四点共圆，而 AB 与 LM 相交于 N，则 $\angle PBC = \angle PBL = \angle PNM = \angle PAM$，从而 P，B，C，A 四点共圆，即点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上．

说明 实际上西姆松定理和托勒密定理是等价的.先用西姆松定理证明托勒密定理证明如下：

如图6.8，$ABCD$ 为任意圆 O 内接凸四边形，联结 AC，过 D 向 $\triangle ABC$ 各边作垂线，AB，AC，BC 所在直线上的垂足分别为 C_1，B_1，A_1，联结 C_1B_1，B_1A_1，由西姆松定理，知

$$C_1B_1 + B_1A_1 = C_1A_1 \quad ①$$

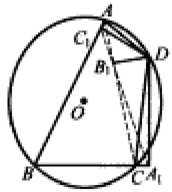


图 6.8

由 A，C_1，B_1，D 四点共圆，且 AD 为该圆直径，再由正弦定理，有

$$C_1B_1 = AD\sin\angle C_1DB_1 = AD\sin\angle C_1AB_1$$

设 R 为圆 O 半径，则

$$\sin\angle C_1AB_1 = \sin\angle BAC = \frac{BC}{2R}$$

故
$$C_1B_1 = \frac{AD \cdot BC}{2R}$$

于是，由式 ① 有

$$AD \cdot BC + CD \cdot AB = AC \cdot BD$$

此即为托勒密定理.

再用托勒密定理证明西姆松定理：

设 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形，则由托勒密定理，有

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \quad ②$$

作 $DC_1 \perp$ 直线 AB 于 C_1，作 $DB_1 \perp$ 直线 AC 于 B_1，则由 A_1，C_1，B_1，D 四点共圆，且 AD 为该圆直径，再由正弦定理，有

$$\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1DB_1} = \frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1AB_1} = AD$$

即
$$C_1B_1 = AD\sin\angle C_1AB_1 = AD \cdot \frac{BC}{2R}（R \text{ 为圆 } O \text{ 半径}）$$

亦即
$$AD \cdot BC = 2R \cdot C_1B_1$$

同理
$$AB \cdot CD = 2R \cdot A_1B_1, AC \cdot BD = 2R \cdot A_1C_1$$

把上述三式代入式 ②，有 $C_1B_1 + A_1B_1 = A_1C_1$.

故 A_1，B_1，C_1 三点在一条直线上，此即为西姆松定理.

因此，在应用中，我们应当注意灵活处置，若应用哪个定理方便，就应用哪个定理.

例 6.2 如图6.9，设 AD，BE，CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高线，自点 D 作 $DP \perp AB$ 于 P，$DQ \perp BE$ 于 Q，$DR \perp CF$ 于 R，$DS \perp AC$ 于 S，联结 PS.求证：Q，R 在

直线 PS 上.

证明 由于 $\triangle BFH$ 的外接圆为圆 $BDHF$，而 D 为该圆上一点，且 D 在 $\triangle BFH$ 三边所在直线上的射影分别为 P,Q,R，于是，由西姆松定理知 P,Q,R 三点共线.

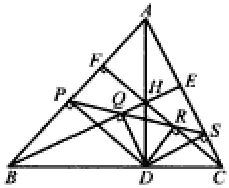


图 6.9

同理，可证 Q,R,S 是 $\triangle HEC$ 的西姆线上三点.

由于直线 PQR 与直线 QRS 有两个公共点 Q,R，所以这两直线重合，故 Q,R 在直线 PS 上.

定理 6 如果 A,B,C,D 是平面上的四个点，且有一个圆同时经过这四个点，那么就称 A,B,C,D 四点共圆.

确定四点共圆的主要方法有：

(1) 诸点到某定点的距离都相等，则诸点在同一个圆上.

(2) 若四边形对角互补或有一个外角等于它的内对角，则这四点共圆.

(3) 同底同侧的等角的三角形的各顶点共圆，同斜边的直角三角形的各个顶点共圆.

(4) 若直线 AB 与 CD 相交于点 P，且 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，则 A,B,C,D 四点共圆.

(5) 若凸四边形 $ABCD$ 中，$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$，则 A,B,C,D 四点共圆.

以上结论证明从略.下面仅一例说明其应用.

例 6.3 （2002 年四川省初中数学竞赛）如图 6.10，P 是圆 O 外一点，PA 与圆 O 切于点 A，PBC 是圆 O 的割线，$AD\perp PO$ 于 D.求证：$PB:BD=PC:CD$.

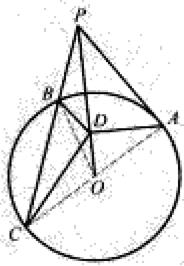


图 6.10

证明 联结 OA,OB,OC，则

$$PA^2=PD\cdot PO=PB\cdot PC$$

于是 B,C,O,D 四点共圆，所以有 $\triangle PCD\backsim\triangle POB$，则

$$\frac{PC}{CD}=\frac{PO}{OB}=\frac{PO}{OC} \quad ①$$

因为 $\triangle POC\backsim\triangle PBD$，所以

$$\frac{PO}{OC}=\frac{PB}{BD} \quad ②$$

由 ①② 有 $$PB:BD=PC:CD$$

例 6.4 （第 49 届 IMO 试题）已知 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，以边 BC 的中

点为圆心，过点 H 的圆与直线 BC 相交于两点 A_1,A_2；以边 CA 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 CA 相交于两点 B_1,B_2；以边 AB 的中点为圆心，过点 H 的圆与直线 AB 相交于两点 C_1,C_2.

证明　六点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 共圆.

证法1　如图 6.11，B_0,C_0 分别是边 CA,AB 的中点，设以 B_0 为圆心，过点 H 的圆与以 C_0 为圆心，过点 H 的圆的另一个交点为 A'，则 $A'H\perp C_0B_0$.

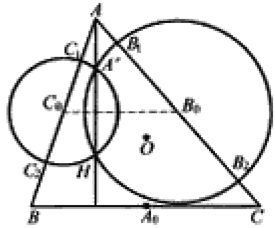


图 6.11

由于 B_0,C_0 分别是边 CA,AB 的中点，所以 $C_0B_0\parallel BC$，从而 $A'H\perp BC$，于是点 A' 在 AH 上.

由切割线定理

$$AC_1\cdot AC_2=AA'\cdot AH=AB_1\cdot AB_2$$

所以，B_1,B_2,C_1,C_2 四点共圆.

分别作 B_1B_2,C_1C_2 的垂直平分线，设他们相交于点 O，则 O 是四边形 $B_1B_2C_1C_2$ 的外接圆圆心，也是 $\triangle ABC$ 的外心，且 $OB_1=OB_2=OC_1=OC_2$.

同理可得，$OA_1=OA_2=OB_1=OB_2$，所以，A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 六点都是在以 O 为圆心，OA_1 为半径的圆上，故六点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 共圆.

证法2　如图 6.12，设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，D,E,F 分别是边 BC,CA,AB 上的中点，联结 DF，交 BH 于点 P，则 $BH\perp DF$，于是由勾股定理得

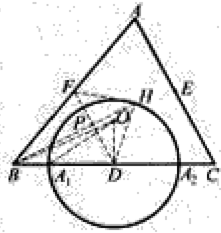


图 6.12

$$BF^2-FH^2=BP^2-PH^2=BD^2-DH^2 \quad ①$$

$$BO^2-A_1O^2=BD^2-A_1D^2=BD^2-DH^2 \quad ②$$

同理可得

$$BO^2-C_2O^2=BF^2-FH^2 \quad ③$$

所以，由①，②，③可得

$$A_1O=C_2O$$

易知　$A_1O=A_2O,C_1O=C_2O$

故　$A_1O=A_2O=C_1O=C_2O$

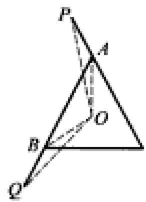
同理　$A_1O=A_2O=B_1O=B_2O$

所以，六点 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 在以 O 为圆心的圆上.

参考答案

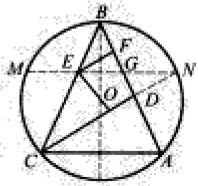
练习 1

1. 如答图 1.1,设 $\triangle ABC$ 的外心为 O,联结 OA,OQ,OB,因为 $OA=OB$,$AP=BQ$,$\angle OAB=\angle OBA=\angle OAC$,所以 $\triangle OAP\cong\triangle OBQ$,所以 $\angle P=\angle Q$,故 O,A,P,Q 四点共圆.



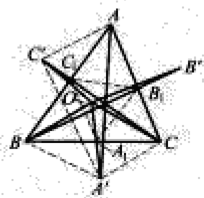
答图 1.1

2. 如答图 1.2,延长 CD 交圆 O 于 N,作直线 EN 交圆 O 于 M,交 AB 于 G.由 OE 垂直平分弦 CN,知 $\angle MNC=\angle ECN=\angle NCA$,即有 $MN\parallel AC$.又 $\angle OEC=\angle OEN$,即知弦 BC 和 MN 关于直线 OE 对称,从而有 $BE=ME$.又直线 OB 为 $\triangle ABC$ 和直线 MN 的公共对称轴,知 $BE=BG$,$ME=GN$,从而 $BE=GN$.欲证 $BE=DF$,须证 $BG=DF$,即 $BF=DG$.但 $EF\parallel CN$,且 EF 平分 $\angle BEG$,故 $\dfrac{BF}{FG}=\dfrac{BE}{EG}=\dfrac{GN}{EG}=\dfrac{DG}{FG}$,于是 $BF=DG$,由此即证得结论.



答图 1.2

3. (1) 如答图 1.3,由四边形 $OBA'C$ 的对角线互相平分,知 $A'C\perp\!\!\!\!=BO$,同理,$C'A\perp\!\!\!\!=BO$,于是 $A'C\perp\!\!\!\!=C'A$,即四边形 $AC'A'C$ 为平行四边形.故知 AA',CC' 在它们的中点 P 相交.同理,BB' 也过点 P,即 AA',BB',CC' 交于一点 P.



答图 1.3

(2) 由于 $A'O$ 关于 BC 对称,易知 $\angle BCA'=\angle BCO=90^\circ-\angle A$,且 $A'C=OC=R$($\triangle ABC$ 的外接圆的半径).设 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,在 $\triangle ACA'$ 中,由

$$\begin{aligned}AA'^2&=R^2+b^2-2Rb\cos(C+90^\circ-A)=R^2+b^2-2Rb\sin(A-C)=\\&R^2+b^2-2Rb(\sin A\cos C-\cos A\sin C)=\\&R^2+b^2-ab\cos C+bc\cos A=\end{aligned}$$

$$R^2+b^2-ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$
$$R^2+b^2+c^2-a^2$$

同理 $BB'^2=R^2+a^2+c^2-b^2, CC'^2=R^2+b^2+a^2-c^2$

从而 $PB^2=\frac{1}{4}(R^2+a^2+c^2-b^2), PC^2=\frac{1}{4}(R^2+b^2+a^2-c^2)$

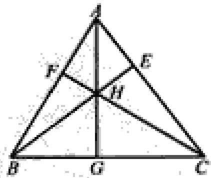
注意到三角形的中线长公式,有

$$PA_1^2=\frac{1}{4}[2(PB^2+PC^2)-BC^2]=$$
$$\frac{1}{4}[\frac{1}{2}(R^2+a^2+b^2-c^2+R^2+a^2+b^2-c^2)-a^2]=\frac{1}{4}R^2$$

同理,$PB_1^2=\frac{1}{4}R^2, PC_1^2=\frac{1}{4}R^2$,故 P 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心.

练习 2

1. $\frac{19}{12}\sqrt{6}$.如答图 1.4.



答图 1.4

因为$\frac{BE}{AE}=\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$,又因为$\triangle BEC\backsim\triangle AEH$,

所以$\frac{BC}{AH}=\frac{BE}{AE}=\frac{\sin A}{\cos A}$,即$\frac{AH}{\cos A}=\frac{BC}{\sin A}$.

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得

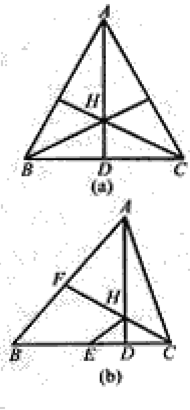
$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times7}=\frac{19}{35}$$

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{12}{35}\sqrt{6}$

所以 $AH=\frac{BC}{\sin A}\cdot\cos A=\frac{35}{12\sqrt{6}}\times\frac{19}{35}=\frac{19}{12}\sqrt{6}$

2.(1) 若 $AB=AC$,则 D 与 E 重合,如答图 1.5(a),知 $\triangle HDC\backsim\triangle ABD$,从而 $HD=\frac{1}{2}DC=\frac{5}{4}$,故 $HD+HE=\frac{5}{2}$.

(2) 若 $AB\neq AC$,设 $CH\perp AB$ 于 F,如答图 1.5(b),设 $ED=x, HD=y$,则 $EH=x^2+y^2$,由 $AD\perp BC, CF\perp AB$,知 $\angle BCF=90°-\angle ABC=\angle BAD, \angle HDC=\angle ADB=90°$,所以 $\triangle HDC\backsim\triangle ABD$, $\frac{HD}{BD}=\frac{DC}{AD}$,即 $HD\cdot AD=DC\cdot BD$,即



答图 1.5

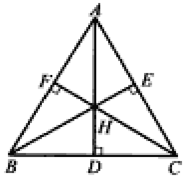
$$5y=(\frac{5}{2}-x)(\frac{5}{2}+x)=\frac{25}{4}-x^2,x^2=\frac{25}{4}-5y$$

故 $$EH^2=(\frac{25}{4}-5y^2+y^2)=(\frac{5}{2}-y)^2,EH=\frac{5}{2}-y$$

所以 $$EH+HD=\frac{5}{2}$$

3. 如答图 1.6，不妨设 $\angle A$ 是锐角，则由 $AB=AC$，得 $BD=DC=\frac{1}{2}BC$，又 $Rt\triangle DAC\backsim Rt\triangle DBH$，所以$\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{HD}$，即

$$AD\cdot HD=BD\cdot CD=\frac{1}{2}BC\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{4}BC^2$$



答图 1.6

所以 $$S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle HBC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD\cdot\frac{1}{2}BC\cdot DH=$$

$$\frac{1}{4}BC^2\cdot AD\cdot DH=$$

$$\frac{1}{4}BC^2\cdot\frac{1}{4}BC^2=\frac{1}{16}BC^4$$

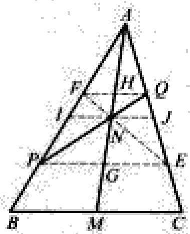
当 $\angle A\geqslant 90°$ 时，同理可证上式成立.

由于 BC 是不变的，所以当点 A 到 BC 的距离变小时，乘积 $S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle HBC}$ 保持不变.

练习 3

1. (1) 若 $PQ /\!/ BC$ 时，结论显然成立.

(2) 如答图 1.7，设 PQ 不平行 BC，过 P 作 $PE /\!/ BC$ 分别交 AM，AC 于 G，E，联结 EN 并延长交 AB 于 F，过 N 作 $IJ /\!/ BC$ 交 AB，AC 于 I，J，联结 FQ 交 AM 于 H.



答图 1.7

因为 AM 为 $\triangle ABC$ 的中线，所以 $FQ /\!/ PE$，$PG=GE$，$IN=NJ$，$FH=HQ$. 所以

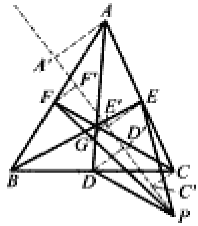
$$\frac{AB}{AP}=\frac{BC}{PE},\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{FQ},\frac{AM}{AN}=\frac{BC}{IJ},\frac{IN}{PE}=\frac{NF}{EF},\frac{NJ}{FQ}=\frac{EN}{EF}$$

所以 $$\frac{IN}{PE}+\frac{NJ}{FQ}=1$$

即 $$\frac{1}{PE}+\frac{1}{FQ}=\frac{1}{IN}=\frac{2}{IJ}$$

所以 $$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=\frac{2BC}{IJ}=\frac{2AM}{AN}$$

2. 联结 PO，设 PO 与 AN 交于 Q'，PO 与 DM 交于 Q''. 在 $\triangle PAC$ 中，由于 AN，PO 分别是 PC 和 AC 的中线，则 Q' 是 $\triangle PAC$ 的重心. 于是 $PQ' = 2Q'O$. 同理，$PQ'' = 2Q''O$. 由于 Q'，Q'' 都在 PO 上，且 $PQ' = \dfrac{2}{3}PO$，$PQ'' = \dfrac{2}{3}PO$，则 Q' 与 Q'' 重合，并且 Q'，Q'' 就是 AN 与 DM 的交点 Q. 所以 P，Q，O 在一直线上，且 $PO = 2OQ$.



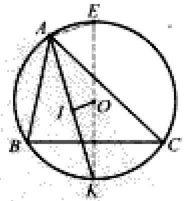
答图 1.8

3. 如答图 1.8，设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，直线 PG 与 AB，BC 相交. 从 A，C，D，E，F 分别作该直线的垂线，垂足为 A'，C'，D'，E'，F'. 易证 $AA' = 2DD'$，$CC' = 2FF'$，$2EE' = AA' + CC'$，从而 $EE' = DD' + FF'$，故

$$S_{\triangle PGE} = S_{\triangle PGD} + S_{\triangle PGF}$$

练习 4

1. 如答图 1.9，联结 KO 并延长交圆 O 于 E，联结 AE，则 $\angle KAE = 90°$，$\dfrac{EK}{OK} = 2$.



答图 1.9

因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心有

$$\frac{AK}{IK} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{4 + 6}{5} = 2$$

于是，$OI \parallel AE$，从而 $\angle OIK = \angle KAE = 90°$.

故 $OI \perp AK$.

2. 设 P 为内切圆与边 BC 的切点，联结 IP，设 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，则

$$MC = \frac{1}{2}a, PC = \frac{a + b - c}{2}, HC = AC\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

由 $\triangle IMP \backsim \triangle EMH$，有

$$\frac{EH}{IP} = \frac{HM}{PM} = \frac{MC - HC}{MC - PC} = \frac{a - 2HC}{c - b} = \frac{b + c}{a}$$

又

$$AH \cdot a = 2S_{\triangle ABC} = r(a + b + c)$$

即

$$\frac{AH}{r} = \frac{a + b + c}{a}$$

再由 $\dfrac{EH}{r} = \dfrac{b + c}{a}$（注意 $IP = r$），及 $AE = AH - EH$，有

$$\frac{AE}{r} = \frac{AH}{r} - \frac{EH}{r} = \frac{a + b + c}{a} - \frac{b + c}{a} = 1$$

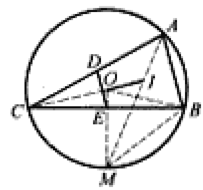
故 $AE = r$.

3. 如答图 1.10,联结 AI 并延长交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 M,联结 BD, OM, OB, BM. 由 I 为内心,知 $BM = CM$. 又 $OC = OB$,则 $OM \perp EB$.

由 AI 平分 $\angle BAC$,且 $AB = AD$,则 $AI \perp BD$.

从而知 $\angle OMI$ 与 $\angle EBD$ 的两组对边分别垂直且它们都是锐角. 因此

$$\angle OMI = \angle EBD \quad ①$$



答图 1.10

由正弦定理,有 $AB = 2R\sin C = 2R\sin 30° = R = OB = OM$,又 $\angle BAD = \frac{1}{2}\overparen{BMC}$ 的度数 $= \overparen{BM}$ 的度数 $= \angle BOM$,从而 $\triangle DAB \cong \triangle MOB$,即有

$$BD = IM \quad ②$$

又 $AD = BE = AB$,则

$$BE = OM \quad ③$$

由 ①②③ 得 $\triangle OMI \cong \triangle EBD$.

从而知通过旋转 90° 和平移可使两个三角形重合,故 $OI \perp DE$, $OI = DE$.

练习 5

1. 提示:先证明 OP 与圆 O 的交点 M 为 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的共同内心,再证明 PO 的延长线与圆 O 的交点 N 为 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的一个共同旁心.

2. 为了证 $\angle RIS$ 是锐角. 由余弦定理,只要证

$$RI^2 + SI^2 - RS^2 = 2RI \cdot SI\cos\angle RIS > 0$$

为此我们来计算 $RI^2 + SI^2 - RS^2$.

令 $MK \parallel RS$,考虑 $\triangle BMR$ 及 $\triangle BSK$,于是

$$\angle MRB = \angle LMK = \frac{1}{2}(\pi - \angle C)$$

同理
$$\angle RMB = \angle AML = \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$$

而 $\angle MBR = \pi - \angle MRB - \angle RMB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = \frac{1}{2}(\pi - \angle B)$

同理
$$\angle KSB = \angle LKM = \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$$

$$\angle SKB = \angle LKC = \frac{1}{2}(\pi - \angle C)$$

$$\angle KBS=\frac{1}{2}(\pi-\angle B)$$

由正弦定理,有

$$\frac{BR}{\sin\angle RMB}=\frac{BM}{\sin\angle MRB},\frac{BK}{\sin\angle KSB}=\frac{BS}{\sin\angle BKS}$$

因此
$$\frac{BR}{BM}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{BK}{BS}$$

令 $BI\perp MK$,所以 $BI\perp RS$.又 $MI\perp AB$,所以考虑直角三角形 $\triangle IRB$,$\triangle ISB$,$\triangle BIM$ 有

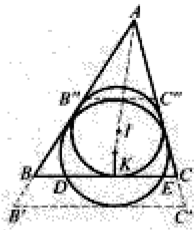
$$IR^2+IS^2-RS^2=(BI^2+RB^2)+(IB^2+BS^2)-(BR+BS)^2=$$
$$2(BI)^2-2BR\cdot BS$$

注意到 $BK=BM$,因此

$$BR\cdot BS=BM^2$$

所以
$$IR^2+IS^2-RS^2=2[(BI)^2-(BM)^2]=2(IM)^2>0$$

3.如答图 1.11.



答图 1.11

(1) 在圆 K 的下方作圆 K 的切线 $B'C'\parallel BC$,分别交 AB,AC 的延长线于 B',C',则 $\triangle AB'C'\backsim\triangle ABC$,并且两个三角形的内切圆半径分别为 ρ,r.

设 $\triangle ABC$,$\triangle AB'C'$ 的高分别为 h,h',则

$$\rho-d=h'-h=h(\frac{h'}{h}-1)=h(\frac{\rho}{h}-1)$$

从而
$$a(d-\rho)=ah(1-\frac{\rho}{r})=$$
$$\frac{2S_{\triangle ABC}}{r}(r-\rho)=2p(r-\rho)$$

其中
$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

(2) 显然有 $DE=2\sqrt{\rho^2-d^2}$,所以要证的等式即为

$$(\rho^2-d^2)(r_a-r)^2=4rr_a(\rho-r)(r_a-\rho) \quad ①$$

在圆 K 的上方作圆 K 的切线 $B''C''\parallel BC$,分别交 AB,AC 于 B'',C'',设 $\triangle AB''C''$ 的高为 h'',其内切圆半径为 r',则由于圆 K 是 $\triangle AB''C''$ 的旁切圆,有

$$\rho+d=h-h''=h(1-\frac{h''}{h})=h(1-\frac{r'}{r})=h(1-\frac{\rho}{r_a})$$

所以 $\rho^2 - d^2 = h^2(\frac{\rho}{r} - 1)(1 - \frac{\rho}{r_a}) = \frac{h^2}{rr_a} = (\rho - r)(r_a - \rho)$

于是式 ① 等价于

$$h(r_a - r) = 2rr_a$$

上式左边 $= h(\frac{S_{\triangle ABC}}{p-a} - \frac{S_{\triangle ABC}}{p}) = \frac{ah \cdot S_{\triangle ABC}}{p(p-a)} = \frac{2S^2_{\triangle ABC}}{p(p-a)}$ = 右边. 由此即证得结论成立.

练习 6

1. 提示:延长 FE 交 AD 于 E,再证 E 为 $\triangle ADF$ 的垂心.

2. 如答图 1.12,由

$$\angle CBP + \angle BCA = \angle CAP + \angle BCA = 90°$$

$$\angle CBP + \angle QBC = \angle QBP$$

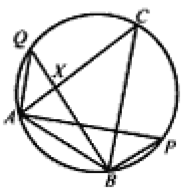
两式相减得 $\angle BCA - \angle QBC = 90° - \angle QBP$

所以,PQ 是圆 S 的直径 $\Leftrightarrow \angle QBP = 90° \Leftrightarrow \angle BCA = \angle QBC \Leftrightarrow BX = CX$.

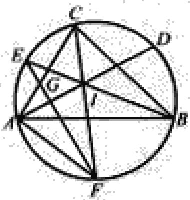
3. 如答图 1.13,设 G 是 AD 和 FE 的交点. 显然 $\angle FAB = \angle FCB$,$\angle AFE = \angle ABE$,在 $\triangle AFG$ 中

$$\angle AFG + \angle FAG = \angle AFE + \angle FAB + \angle BAD = \angle ABE + \angle BCF + \angle BAD$$

因为内心是三角形三条角平分线的交点, 所以 $\angle ABE + \angle BCF + \angle BAD = 90°$. 因此,$\angle AGF = 90°$,故 $AD \perp EF$.



答图 1.12



答图 1.13

练习 7

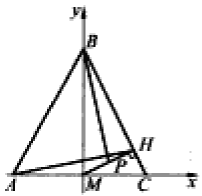
1. 如答图 2.1, 设 $AC = 4$, $\angle C = \alpha$, $A(-2,0)$, $B(0,2\tan\alpha)$, $H(2\sin^2\alpha, 2\sin\alpha\cos\alpha)$, 所以

$$P(2\sin^2\alpha, \sin\alpha\cos\alpha)$$

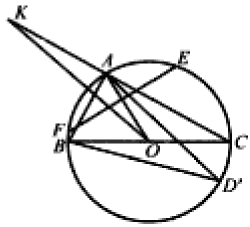
所以 $k_{AH} \cdot k_{BP} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha + 2} \cdot \frac{2\tan\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{0 - \sin^2\alpha} =$

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+1}\cdot\frac{\sin\alpha(2-\cos^2\alpha)}{-\sin^2\alpha\cos\alpha}=-1$$

故 $AH\perp BP$.



答图 2.1



答图 2.2

2. 如答图 2.2,设 $\angle AOC=\theta, 60^\circ<\theta<180^\circ, C(R\cos 0^\circ, R\sin 0^\circ), A(R\cos\theta, R\sin\theta), B(R\cos 180^\circ, R\sin 180^\circ), E(R\cos(\theta-60^\circ), R\sin(\theta-60^\circ)), F(R\cos(\theta+60^\circ), R\sin(\theta+60^\circ))$,所以

$$\angle AD'B=\angle C=90^\circ-\frac{\theta}{2}$$

所以
$$\angle BAD'=45^\circ+\frac{\theta}{4}$$

所以
$$\angle CAD'=90^\circ-(45^\circ+\frac{\theta}{4})=45^\circ-\frac{\theta}{4}$$

因为 $OK /\!/ AD'$,所以

$$\angle OKC=\angle D'AC=45^\circ-\frac{\theta}{4}$$

所以
$$\angle KOC=180^\circ-(45^\circ-\frac{\theta}{4})-90^\circ-\frac{\theta}{2}=45^\circ+\frac{3\theta}{4}$$

所以
$$\frac{OK}{\sin(90^\circ-\frac{\theta}{2})}=\frac{R}{\sin(45^\circ-\frac{\theta}{4})}$$

所以
$$OK=2R\cos(45^\circ-\frac{\theta}{4})$$

设 $K(x',y')$,所以

$$x'=OK\cos(45^\circ+\frac{3\theta}{4})=2R\cos(45^\circ-\frac{\theta}{4})\cos(45^\circ+\frac{3\theta}{4})=$$

$$R[\cos(90^\circ+\frac{\theta}{2})+\cos(-\theta)]=R(\cos\theta-\sin\frac{1}{2}\theta)$$

$$y'=2R\cos(45^\circ-\frac{\theta}{4})\sin(45^\circ+\frac{3\theta}{4})=$$

$$R[\sin(90^\circ + \frac{\theta}{2}) + \cos\theta] = R(\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2})$$

设 $\triangle CEF$ 的顶点 C 所对的旁心为 I_1,所以

$$I_1(R(-\cos\frac{0^\circ + \theta - 60^\circ}{2} + \cos\frac{0^\circ + \theta + 60^\circ}{2} + \cos\frac{2\theta}{2}),$$
$$R(-\sin\frac{0^\circ + \theta - 60^\circ}{2} + \sin\frac{0^\circ + \theta + 60^\circ}{2} + \sin\frac{2\theta}{2}))$$

即
$$I_1(R(\cos\theta - \sin\frac{\theta}{2}), R(\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}))$$

所以 K 与 I_1 重合,即证.

3. 以点 I 为原点建立直角坐标系,设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), P(x_0, y_0)$,则由三角形的内心坐标公式,得 $ax_1 + bx_1 + cx_1 = ay_1 + by_1 + cy_1 = 0$,且

$$\begin{aligned}
\text{左边} = & a[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2] + b[(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2] + \\
& c[(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2] = \\
& (a + b + c)x_0^2 + (a + b + c)y_0^2 + a(x_1^2 + y_1^2) + \\
& b(x_2^2 + y_2^2) + c(x_3^2 + y_3^2) - 2x_0(ax_1 + bx_2 + cx_3) - \\
& 2y_0(ay_1 + by_2 + cy_3) = (a + b + c)(x_0^2 + y_0^2) + \\
& a(x_1^2 + y_1^2) + b(x_2^2 + y_2^2) + c(x_3^2 + y_3^2) = \\
& (a + b + c) \cdot IP^2 + a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2
\end{aligned}$$

故命题成立.

练习 8

1. A. 由于 $\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ 过 BC 的中点,当 $\lambda \in (0, +\infty)$ 时,$\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C})$ 表示垂直于 BC 的向量,所以点 P 在 BC 的垂直平分线上,故动点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的外心,故选 A.

2. 记 $\triangle BOC, \triangle COA, \triangle AOB$ 的面积分别为 S_A, S_B, S_C. 又设 $\triangle ABC$ 的面积为 S,由定理得

$$\overrightarrow{AO} = \frac{S_B}{S}\overrightarrow{AB} + \frac{S_C}{S}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BO} = \frac{S_A}{S}\overrightarrow{BA} + \frac{S_C}{S}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CO} = \frac{S_B}{S}\overrightarrow{CB} + \frac{S_A}{S}\overrightarrow{CA}$$

将上面三式代人$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$中,结合

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

可以得到 $$(4S_B-2S_A-2S_C)\overrightarrow{AB}+3(S_C-S_A-S_B)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$$

所以 $$\begin{cases}4S_B-2S_A-2S_C=0\\3S_C-3S_A-3S_B=0\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}S_B=2S_A\\S_C=3S_A\end{cases}$$

因此,$\triangle ABC$的面积$S=6S_A$,而$\triangle AOC$的面积为$S_B=2S_A$,所以$\triangle ABC$的面积与$\triangle AOC$的面积之比为3∶1.

3.因为

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})$$

因为$AB=AC$,所以$\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BC}$,故

$$\begin{aligned}12\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}&=(2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})=\\&3|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-4|\overrightarrow{OC}|^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\\&3R^2+R^2-4R^2+4\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0\end{aligned}$$

练习9

1.(1)因为

$$\frac{AI_b\cdot BI_a}{AI\cdot BI}=\frac{p(p-c)^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}\cdot\frac{BI_a\cdot CI_a}{BI\cdot CI}=\sqrt{\frac{p(p-b)^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

所以 $$\frac{AI_b\cdot CI_a}{AI\cdot CI}=\sqrt{\frac{p(p-a)^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

所以 $$\begin{aligned}&\frac{AI_b\cdot BI_a}{AI\cdot BI}+\frac{BI_a\cdot CI_c}{BI\cdot CI}+\frac{AI_b\cdot CI_a}{AI\cdot CI}=\\&\sqrt{\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}}[3p-(a+b+c)]=\\&\frac{p^2}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{p^2}{S}=\frac{p^2}{rp}=\frac{p}{r}\end{aligned}$$

(2) $$\frac{AI\cdot BI}{AI_b\cdot BI_a}+\frac{BI\cdot CI}{BI_a\cdot CI_c}+\frac{AI\cdot CI}{AI_b\cdot CI_a}=r\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=$$

$$\frac{r}{s}\left(\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}\right)=$$
$$\frac{r}{s}(r_a+r_b+r_c)=\frac{4R+r}{p}$$

2. 因为

$$AI=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}},BI=\sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}},CI=\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}$$

所以 $AI\cdot BI\cdot CI=\frac{abc}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{p^2}\cdot S=$

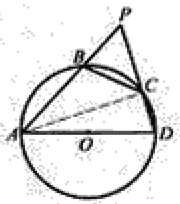
$$\frac{abc}{p^2}\cdot rp=\frac{2abc}{a+b+c}\cdot r=4Rr^2$$

3. $$\frac{bc}{AI^2}+\frac{ca}{BI^2}+\frac{ab}{CI^2}=\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}=$$
$$\frac{p}{s}\left(\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}\right)=$$
$$\frac{1}{r}(r_a+r_b+r_c)=\frac{4R+r}{r}$$

练习 10

1. 解法 1 由割线定理得：$PB\cdot PA=PC\cdot PD$，有 $8\times 20=PC(PC+6)$，解得 $PC=10$.

如答图 4.1，联结 AC，在 $\triangle PAC$ 中，由 $PA=2PC$，$\angle APC=60°$，得 $\angle PCA=90°$，从而 AD 是圆的直径.



答图 4.1

在 Rt$\triangle PCA$ 中，$AC=\sqrt{PA^2-PC^2}=10\sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=4\sqrt{21}$.

所以 $R=\frac{1}{2}AD=2\sqrt{21}$，选 B.

解法 2 由割线定理，求得 $PC=10$. 在 $\triangle PAD$ 中，由余弦定理，得

$$AD=\sqrt{PA^2+PD^2-2PA\cdot PD\cos 60°}=4\sqrt{21}$$

在 $\triangle PAC$ 中，由 $PA=2PC$，$\angle APC=60°$，得 $\angle PCA=90°$，从而 AD 为圆的直径.

故 $R=\frac{1}{2}AD=2\sqrt{21}$，选 B.

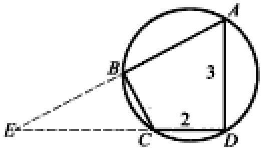
2. (1) 由 $\angle B=90°$ 知，AC 为圆的直径，则 $\angle D=90°$.

如答图 4.2，延长 AB,DC 交于 E，则 $\angle E = 30°$，所以

$$AE = 2AD = 6, DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = 3\sqrt{3}$$

从而 $$EC = DE - CD = 3\sqrt{3} - 2$$

故 $$BC = \frac{1}{2}EC = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1$$



答图 4.2

(2) 因为 $BE = \sqrt{3}BC = \frac{9}{2} - \sqrt{3}$，所以

$$S_{四边形ABCD} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CBE} = \frac{5}{8}\sqrt{3} + \frac{9}{2}$$

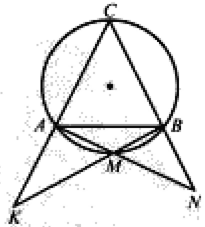
(3) 因为

$$AB = AE - BE = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

所以 $$AB + BC = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{2} \times 1.8 + \frac{1}{2} = 5 = AD + CD$$

3. 如答图 4.3，因为 $\angle AMK = \angle C = \angle CAB = \angle K + \angle ABK$，$\angle AMK = \angle MAB + \angle ABK$，所以 $\angle K = \angle BAM = \angle BAN$，同理 $\angle ABK = \angle N$，所以 $\triangle ABK \backsim \triangle BAN$，从而有 $\frac{AB}{BN} = \frac{AK}{AB}$.

故 $AK \cdot BN = AB^2$（为常数），即 AK 与 BN 的乘积与点 M 的选择无关.



答图 4.3

练习 11

1. 如答图 5.1

$$\angle BIC = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 120°$$

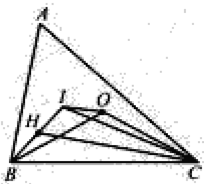
$$\angle BHC = 180° - (90° - \angle C) - (90° - \angle B) = 120°$$

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 120°$$

所以 B,H,I,O,C 共圆. 而 $BH = OI$，所以 $\angle BCH = \angle OCI$，所以

$$90° - \angle B = \left|\frac{180° - 120°}{2} - \frac{1}{2}\angle C\right|$$

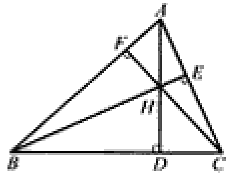
又 $\angle B + \angle C = 120°$，所以 $\angle B = 80°$，$\angle C = 40°$.



答图 5.1

2. 如答图 5.2，设 AD，BE，CF 分别为锐角 $\triangle ABC$ 三边 BC，CA，AB 上的高，则它们共点于垂心 H，易得 $\triangle AHE \backsim \triangle BCE$，所以

$$\frac{AH}{BC}=\frac{AE}{BE}=\cot A$$



答图 5.2

于是 $AH = BC\cot A = 2R\sin A\dfrac{\cos A}{\sin A} = 2R\cos A$

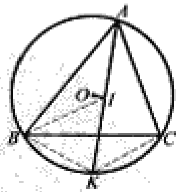
同理 $BH = 2R\cos B$，$CH = 2R\cos C$，其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，所以

$$AH+BH+CH=2R(\cos A+\cos B+\cos C)=$$
$$2R+2R(\cos A+\cos B+\cos C-1)=$$
$$2R+8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

故 $$AH+BH+CH=2R+2r=2(R+r)$$

3. 如答图 5.3，延长 AI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 K。联结 KB，KC，BI。因为

$$\angle KIB=\angle KBI=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$$



答图 5.3

所以 $KI = KB = KC$。设 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$。则由托勒密定理，得

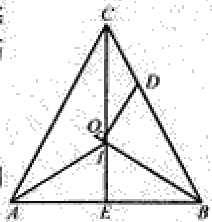
$$b\cdot BK+c\cdot CK=a\cdot AK$$

即 $$KI\cdot(b+c)=a\cdot AK$$

由题设条件，知 $a=\dfrac{b+c}{2}$，代入上式，有 $AK = 2KI$。这表明 I 为 AK 中点，即 I 为等腰 $\triangle AOK$ 底边上的中点，故 $OI\perp AK$。

4. 若 $\triangle ABC$ 是等边三角形（O 与 I 重合），则结论显然成立。若点 O 在点 I 和 C 之间（如答图 5.4），作底边上的高 CE，则

$$\angle EIB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC,\angle ODB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC$$

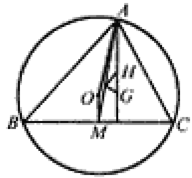


答图 5.4

所以 $\angle OIB+\angle ODB=180^\circ$。故点 B，I，O，D 四点共圆，因此，$\angle IDB=\angle IOB$。而 $\angle IOB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\angle ACB$，于是 $\angle IDB=\angle ACB$，故 $ID\parallel AC$。当 I 位于点 O 与 C 之间时，同理可证。

5. 如答图5.5，设 M 为 BC 的中点，G 为重心. 令 $GM = x$，则由中线公式得 $AM = 3x = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$，所以 $(6x)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. 又在 Rt$\triangle OBM$ 中，由斯特瓦尔特定理得

$$OG^2 = \frac{OA^2 \cdot x + OM^2 \cdot 2x}{3x} - 2x^2 = \frac{1}{3}\left[R^2 + \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right)\cdot 2 - 6x^2\right]$$



答图 5.5

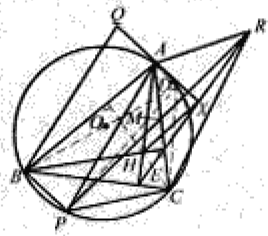
又由欧拉定理得

$$OH = 3OG$$

$$OH^2 = 9OG^2 = 3R^2 + 6\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{1}{2}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

6. 不妨假设 $\triangle BIC$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则 $\angle BIC \neq \angle A$. 实际上，若 $\angle BIC = \frac{1}{2}\angle A + 90° = \angle A$，则 $\angle A = 180°$，矛盾. 不妨假设 $\angle IBC = \angle A$，$\angle BIC = \angle C$，$\angle ICB = \angle B$，则有 $\frac{1}{2}\angle B = \angle A$，$90° + \frac{1}{2}\angle A = \angle C$，$\frac{1}{2}\angle C = \angle B$，从而 $\angle A = \frac{\pi}{7}$，$\angle B = \frac{2\pi}{7}$，$\angle C = \frac{4\pi}{7}$. 因此，$\triangle ABC$ 的各角分别为 $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$.

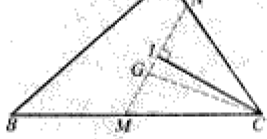
7. 如答图5.6，联结 PR 交 AC 于 M，则 M 为 AC 中点，也为 PR 中点. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 BD，联结 DA, DC, HA, HC. 因为 $DA \perp AB$，$HC \perp AB$. 所以 $DA \parallel HC$. 同理 $DC \parallel HA$. 故四边形 $AHCD$ 为平行四边形，M 为 DH 的中点. 于是四边形 $HRDP$ 为平行四边形，故 $HR \parallel DP$. 因为 $QX \parallel BP$，$BP \perp DP$，所以 $HR \perp QX$，$\angle AXH = 90°$. 又因为 $\angle AEH = 90°$，故 A，H，E，X 四点共圆，所以 $\angle AXE + \angle AHE = 180°$. 而 $\angle AHE = \angle ACB = \angle APB = \angle PAX$，故 $\angle AXE + \angle PAX = 180°$. 于是，$EX \parallel AP$.



答图 5.6

8. 如答图5.7，设直线 GI 与 BC，CA 分别交于 M 和 N，联结 CG，并设 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，内切圆半径为 r，BC 与 CA 边上的高分别为 h_a 和 h_b，则

$$r(a + b + c) = 2S_{\triangle ABC} \quad ①$$

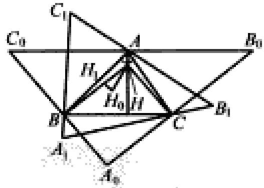


答图 5.7

又易得
$$\mathrm{Rt}\triangle CIM \cong \mathrm{Rt}\triangle CIN$$
所以
$$2S_{\triangle CIM} = S_{\triangle CMN} = S_{\triangle GMC} + S_{\triangle GNC}$$
即
$$MC \cdot r = \frac{1}{2}MC \cdot \frac{1}{3}h_a + \frac{1}{2}NC \cdot \frac{1}{3}h_b$$
而 $MC = NC$,所以 $r = \frac{1}{6}(h_a + h_b)$.

又 $h_a = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a}, h_b = \frac{2S_{\triangle ABC}}{b}$,于是
$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot S_{\triangle ABC} \qquad ②$$
故由 ① 和 ② 可得 $\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$.

9. 如答图 5.8,设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,则
$$\angle BHC = 180° - \angle CAB = 180° - \angle C_1A_1B_1$$
于是 H,B,A_1,C 四点共圆. 同理可知 H,C,B_1,A 四点共圆,H,A,C_1,B 四点共圆. 从而



答图 5.8

$$\angle B_1HC_1 = \angle B_1HA + \angle C_1HA = \angle B_1CA + \angle C_1BA = 360° - (\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1) - (\angle BAC_1 + \angle CAB_1) = \angle B_1A_1C_1 + \angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1$$
同理可证
$$\angle C_1HA_1 = 2\angle C_1B_1A_1, \angle A_1HB_1 = 2\angle A_1C_1B$$

所以,H 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心. 分别过 $\triangle ABC$ 的顶点作对边的平行线,围出 $\triangle A_0B_0C_0$,可知 H 也是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的外心,并且 A_1 在以 A_0H 为直径的圆上,因而,可将 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕 H(以 H 为旋转中心)旋转 $\angle A_1HA_0$(逆时针)后,所得三角形与 $\triangle A_0B_0C_0$ 位似(以 H 为位似中心). 所以 $\angle HH_1H_0 = \angle HA_1A_0 = 90°$,这里 H_0,H_1 分别是 $\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心. 所以,我们只须证明 $\triangle ABC$ 的外心 O 为线段 HH_0 的中点. 事实上,利用 $\triangle ABC$ 关于其重心 G,以 -2 为位似比,所得的位似图形为 $\triangle A_0B_0C_0$. 可知 $\overrightarrow{MH_0} = -2\overrightarrow{MH}$,而由欧拉线可知 $\overrightarrow{MH} = -2\overrightarrow{MO}$,于是 $\overrightarrow{OH_0} = -\overrightarrow{OH}$. 所以,$O$ 为 HH_0 的中点.

参考文献

[1] 沈文选.平面几何证明方法全书[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2005.
[2] 钟集.平面几何证题法[M].广州:广东科学技术出版社,1986.
[3] 徐世泽.三角形的巧合点[M].南京:江苏教育出版社,1984.
[4] 程龙.初等数学论丛(第3辑)[M].上海:上海教育出版社,1981.
[5] 李风坤,武延树.三角心旁心的性质[J].数学通报,1995(2):26.
[6] 沈文选,张垚,冷岗松.奥林匹克数学中的几何问题[M].长沙:湖南师范大学出版社,2004.
[7] 汪江松,黄家社.几何明珠[M].武汉:中国地质大学出版社,1988.
[8] 苏化明.关于三角形的垂足三角形[G]//数学竞赛(第22辑).湖南:湖南教育出版社,1994.
[9] 沈文选.含有60°内角的三角形的性质及应用[J].中学数学(湖北),2003(1):9.
[10] 沈文选.关于双圆四边形的一些结论[J].数学通报,1991(5):28.
[11] 李耀文.关于垂足三角形的一个恒等式[J].中学数学(湖北),2004(6):44.
[12] 闵飞.三角形的外角平分线三角形的性质[J].中学数学(湖北),2004(8):46.
[13] 邹守文.关于三角形外角平分线三角形的一个恒等式[J].中学数学(湖北),2005(5):45.
[14] 方廷刚.怎样判别三角形的外心[J].中学数学(湖北),1995(3):26.
[15] 黄金福.另辟蹊径,绕道而行[J].中等数学,1989(3):12.
[16] 熊先汉.用垂足三角形的性质解竞赛题[J].中学数学(湖北),1987(8):43.
[17] 方亚斌,方文.三角形面积比的两个性质及应用[J].中学数学(湖北),1986(8):45.
[18] 方亚斌.三角形垂心的性质及其应用[J].中学数学(湖北),1995(1):39.
[19] 江焕新.垂心的妙用[J].中等数学,1989(3):13.
[20] 梁仁臣,等.垂距余弦公式的改进、简证和应用[J].中学数学(湖北),2004(1):47.
[21] 孙哲.从三角形的外心谈起[J].中学数学(湖北),2004(3):47.
[22] 李耀文,任伟.关于三角形的双圆半径的一个恒等式[J].中学数学,2003

(5):48.
[23] 方亚斌.数学竞赛命题中的一个基本图形[J].中学数学,1998(12):1.
[24] 李长明.两道赛题的联系、深化和推广[J].中学数学(湖北),2001(3):42.
[25] 南秀全,刘汉文.三角形内心的一个基本性质及其应用[J].中等数学,1992(4):1.
[26] 沈文选.三角形巧合点间的一些性质及应用[J].中学数学月刊,2002(5):42.
[27] 黄金福.三角形的五心[J].中等数学,1994(2):4.
[28] 布仁.三角形中"四心"的关系[J].中学数学(苏州),1994(1):36.
[29] 吴有才.一类圆内接六边形及其面积定理[J].中学数学(湖北),1998(12):42.
[30] 方亚斌.三角形的"四心"与一组面积关系式[J].中学数学(湖北),1993(2):25.
[31] 刘裕文.欧拉定理、费尔巴哈定理及相关命题的统一证明[J].数学通报,1994(10):28.

[32] 周才凯.关于三角形五心的类正弦定理[J].数学通报,1994(3):27.
[33] 苏化明.关于重心的垂足三角形的性质[J].中学数学(苏州),1999(8):10.
[34] 沈文选.从一道竞赛题谈起[J].湖南数学通讯,1993(1):30.
[35] 王扬.圆内接四边形的几个相关四边形[J].中学数学教学,1993(3):7.
[36] 胡耀宗.也谈一道数学竞赛题[J].中学数学(苏州),1994(9):19.
[37] 杨宗长,魏永峰.圆内接四边形的若干性质[J].中等数学,1998(4):24.
[38] 闵飞.两个优美几何恒等式的简证[J].数学通报,2006(10):58.
[39] 贯福春.四边形的两个优美性质[J].中学数学,2005(7):47.
[40] 李耀文.一种特殊的圆内接四边形的性质及其应用[J].中学教研(数学),2000(9):34.
[41] 贺功保.计算三角形"心距"的统一公式[J].中学数学研究,1999(5):14.
[42] 贺功保.计算三角形顶点与"心"距离的统一公式[J].湖南数学通讯,1996(1):14.
[43] 贺功保.关于费马点与"心"的距离公式[J].中学数学研究,2006(4):14.
[44] 孙禾工,许国芳.关于三角形内心、旁心的距离公式及应用[J].中学教研(数学),1998(1,2):29.
[45] 赴加营.三角形五"心"向量形式的充要条件[J].数学通讯,2002(1):26.
[46] 黄桂君,徐春林.源于一道教材习题的几例高考题[J].中学数学,2006(5):

36.
[47] 方廷刚,内心与旁心的向量方程的改进[J].数学通讯,2003(21):21.
[48] 王宏梅,蔡明星.三角形"四心"的向量视角及其应用[J].中学数学,2006(7):37.
[49] 袁利江.三角形的一个定比性质及其推广[J].中学数学,2006(7):49.
[50] 王宏梅.向量视角下的三角形"四心"[J].高中数学教与学,2006(2):11.
[51] 梁克强,徐章梅.三角形四心的向量表达式[J].上海中学数学,2003(2):41.
[52] 孙迪青.一个三角形重心向量性质的空间推广[J].数学通讯,2006(1):13.
[53] 卢琼.平面向量基本定理的面积表示及其应用[J].数学通讯,2007(1):12.
[54] 茹双林.向量法证明平面几何问题[J].中等数学,2000(6):6.
[55] 申建春.三角形垂心坐标公式应用二三例2000[J].中等数学,1992(4):12.
[56] 申建春.三角形内心公式与竞赛题1992[J].中等数学,1991(1):32.
[57] 唐建忠,邹黎明.由一道国际数学奥林匹克试题谈起[J].中学教研(数学),2003(3):37.
[58] 龙艳,杨克建,朱达坤.一道平面几何命题的应用及推广[J].中学数学,2002(7):45.
[59] 周春荔.98年全国高中数学联赛加试第一题几何证法探究[J].中等数学,1999(1):12.
[60] 姜薇,等.98年全国高中数学联赛加试第一题学生的几种证法[J].中等数学.1999(1):15.
[61] 贺功保.1998年全国高中数学联赛加试第一题的探究[J].湖南数学通讯,1998(6):13.
[62] 王国平.2002年高中数学联赛加试第一题的简解[J].中学教研(数学),2003(4):25.
[63] 朱达坤.2002年全国高中联赛加试试题另解[J].中学数学,2006(11):39.
[64] 李建泉,等.2005年全国高中数学联赛加试试题另解[J].中等数学,2006(1):12.
[65] 李建泉,等.2001年全国高中数学联赛加试试题另解[J].中等数学,2002(1):10.
[66] 高应瑜,姚先伟.应用一个结论,巧证一类赛题[J].中学教研(数学),2004(11):44.
[67] 苏炜杰.$AI+BI+CI$的一个上界[J].数学通报刊,2007(4):63.

[68] 熊斌.三角形的外心与内心[J].中等数学,2006(11):2.
[69] 李耀文.三角形垂心的一个性质[J].中学数学,2006(1):43.
[70] 李耀文.三角形外心的一个性质[J].中学数学,2006(12):36.
[71] 李建泉.与三角形内心的一个性质有关的一类问题[J].中学教研(数学),2008(6):26.
[72] 单建.三角形内外心连线的一个性质[J].数学通报,2007(11):56.
[73] 沈毅,卿永彤.三角形内外心连线一个性质的再研究[J].中学数学教学,2008(4):50.
[74] 熊曾润.三角形外心一个性质的多方位推广[J].中学数学,2008(2):25.
[75] 任爽.相关知识点在解竞赛题中的运用[J].中等数学,2007(12):11.
[76] 耿绍辉.一道国外竞赛题的多种解法[J].中等数学,2008(3):19.
[77] 曾玉良.与垂足三角形内切圆有关的几个等式[J].数学通报,2008(5):51.
[78] 曾金兰.三角形"四心"的向量统一形式及证明[J].中学数学,2008(6):40.
[79] 黄金福.三角形的旁心[J].中等数学,2007(5):5.
[80] 王子文.有关垂心的一个性质[J].中等数学,2007(10):15.
[81] 苏化明.一道 IMO 预选题的探讨[J].中等数学,2007(9):19.
[82] 黄金福.三角形的欧拉线[J].中等数学,2005(8):2.
[83] 李成章.从垂足三角形谈起[J].中等数学,2005(10):9.
[84] 张俊.两个三角形重心相同的充要条件[J].数学通讯,2008(10):35.
[85] 皇甫红琴.再论两个三角形重心相同的充要条件[J].数学通讯,2008(13):36.
[86] 丁兴春.两个三角形垂心相同的充要条件[J].数学通讯,2007(17):17.
[87] 王元.第 49 届 IMO 试题及解答[J].上海中学数学,2008(9):3.
[88] 陶平生.解题小品——与角平分线有关的性质及其应用[J].中等数学,2008(10):12.